4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Une urne contient n boules ($n \geqslant 2$). Notons E l'ensemble de ces boules. On suppose $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E, muni de l'équiprobabilité. On effectue un tirage aléatoire d'une partie de ces boules, c'est-à-dire d'un élément de $\mathcal{P}(E)$. S'il reste des boules, on effectue un deuxième tirage (sans remettre dans l'urne les boules éventuellement obtenues au premier tirage) et on continue jusqu'à ce que l'urne soit vidée. À chaque tirage, l'ensemble des parties restantes est muni de l'équiprobabilité.

1. Quelle est la probabilité que l'urne soit vidée au premier tirage ?

2. Quelle est la probabilité que l'urne soit vidée en au plus 2 tirages ?

3. Montrer que la probabilité que l'urne soit vidée en au plus k tirages ($1 \leqslant k$) vaut $\big(1 - \frac{1}{2^k}\big)^n$.

4. On note X le nombre aléatoire de tirages effectués pour vider l'urne. Vérifier que X est bien une variable aléatoire et déterminer la loi de X.

Solution :

1. L'urne est vidée dès le premier tirage si la poignée obtenue contient toutes les boules. Il y a un seul cas favorable (l'ensemble E) et 2^n cas possibles (le cardinal de$\mathcal{P}(E)$). Donc, par hypothèse d'équiprobabilité :

$$p_1 = \frac{1}{2^n} = \big(1 - \frac{1}{2}\big)^n$$

2. L'urne est vidée en au plus deux tirages si on tire j boules lors du premier tirage ($0 \leqslant j \leqslant n$), puis (s'il reste des boules) les $n - j$ boules restantes lors du deuxième tirage. En remarquant que le cas $j = n$ peut rester dans la sommation, il vient :

$$p_2 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^{n-j}} = \frac{1}{4^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j = \frac{1}{4^n}(2+1)^n = \big(\frac{3}{4}\big)^n = \big(1 - \frac{1}{2^2}\big)^n$$

3. Soit A_k l'événement «l'urne est vidée en au plus k tirages».

A chaque rang du tirage, la probabilité d'obtenir une boule donnée parmi celles encore présentes dans l'urne vaut $\frac{1}{2}$. En effet, si l'urne contient à cet instant m boules, alors il y a exactement 2^{m-1} parties de cet ensemble qui contiennent une boule précisée, parmi les 2^m parties de l'ensemble.

Dire que l'on réalise $(X \leqslant k)$, c'est dire que chacune des n boules a été obtenue en au maximum k essais.
La probabilité que la boule portant le numéro 1 ne soit pas obtenue en k essais vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, donc la probabilité de l'obtenir en au maximum k essais vaut $1 - \frac{1}{2^k}$.

En faisant ce raisonnement pour chacune des n boules, on obtient :

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$$

4. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$$

On constate que la formule reste valable pour $k = 1$, et pour tout $N \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^n \underset{N \to +\infty)}{\longrightarrow} 1$$

Donc X est bien une variable aléatoire.

Exercice 4.2.

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on dit qu'une matrice X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $X^m = 0$. De même, on dira que X est unipotente si $I_3 - X$ est nilpotente, où I_3 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

De même si N est unipotente, on pose :

$$\ln(N) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(I_3 - N)^n}{n}$$

1. Montrer que les formules précédentes ont bien un sens.

2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

3. Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que N est nilpotente et que U est unipotente. Montrer que $\exp\big(\ln(U)\big) = U$ et $\ln\big(\exp(N)\big) = N$.

4. Pour t réel, on pose $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $U(s)U(t) = U(s+t)$.

Montrer que $U(t) = \exp(tN)$, où N est une matrice nilpotente que l'on déterminera.

Solution :

1. Comme A est une matrice nilpotente, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ (on peut montrer que $m \leqslant 3$) tel que $A^m = 0$ et : $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{A^n}{n!}$.
Le raisonnement est identique pour $\ln(N)$

2. Si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $A+B$ est nilpotente. En effet, quitte à choisir l'exposant maximal, on peut supposer que $A^m = B^m = 0$. En utilisant la formule de Newton :

$$(A+B)^{2m-1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} A^k B^{2m-1-k} = 0$$

car $A^k = 0$ pour $m \leqslant k \leqslant 2m$ et $B^{2m-1-k} = 0$ pour $0 \leqslant k < m$.
On a alors, en supposant $A^m = B^m = 0$:

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{2m-1} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \times \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!}\Big)\end{aligned}$$

(car les termes supplémentaires sont tous nuls !)

Soit :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(A)$$

3. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = 0, (I-U)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (I-U)^3 = 0.$$

On a :

$$\ln(U) = -(I-U) - \frac{(I-U)^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c - ab/2 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(\ln U) = I + \ln(U) + \frac{\ln^2(U)}{2} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

La démonstration de $\ln(\exp(N)) = N$ est identique.

4. Il suffit d'effectuer le calcul pour trouver $U(s)U(t) = U(s+t)$.

On a enfin $U(t) = \exp(tN)$, avec : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve ainsi, en utilisant la question 2 :

$$U(s)U(t) = \exp(tN) \times \exp(sN) = \exp((t+s)N) = U(s+t)$$

Exercice 4.3.

Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\,dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt.$$

1. a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$. Étudier le sens de variation de f_n.

b) Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
Donner la valeur de c_0.

2. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question précédente.
Montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0,1]$.

3. a) Déterminer, pour tout réel $r > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{nt^2}\,dt$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt \leqslant 1$.

c) En déduire la valeur de ℓ.

Solution :

1. a) La fonction f_n est dérivable (intégrale fonction de ses bornes ...) et, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 0$:

$$f_n'(x) = \mathrm{e}^{nx^2} + \mathrm{e}^{-nx^2} > 0$$

b) La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et

$$f_n(0) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{nt^2}\,dt < 0, f_n(1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{nt^2}dt > 0$$

Il existe donc, pour tout $n \geqslant 0$, un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$. Enfin, $f_0(x) = 2x - 1$ entraîne que $c_0 = \dfrac{1}{2}$.

2. On a :

$$f_{n+1}(c_n) = \int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2+t^2}dt - \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2-t^2}dt \geqslant \int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}dt - \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}dt = 0.$$

ce qui montre que la suite $(c_n)_n$ est décroissante. Elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

3. a) On a pour tout x, $\mathrm{e}^x > 1 + x$. Donc :

$$\int_0^r \mathrm{e}^{nt^2}dt \geqslant \int_0^r (1 + nt^2)dt = r + \frac{nr^3}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

b) Comme $c_n \in [0,1]$ et $\mathrm{e}^{-nt^2} \leqslant 1$, il vient $\displaystyle\int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}dt \leqslant 1$.

c) Supposons que $\ell > 0$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$ en décroissant, on a $c_n \geqslant \ell$ pour tout n et alors :

$$\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}dt \geqslant \int_0^{\ell} \mathrm{e}^{nt^2}dt$$

Soit :

$$1 \geqslant \int_{c_n}^{1} \mathrm{e}^{-nt^2} dt = \int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2} dt \geqslant \int_0^{\ell} \mathrm{e}^{nt^2} dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La contradiction est claire, donc $\ell = 0$.

Exercice 4.4.

On pose pour tout x réel, $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x)$$

2. Montrer que φ admet un développement limité en 0 à tout ordre N. Déterminer ce développement limité.

3. a) Montrer que $\forall\, x \geqslant 1, \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\, dt$.

b) Exprimer de même $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\, dt$

c) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer alors que $\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Solution :

1. La fonction φ est de classe C^∞, car $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sont de classe C^∞ ce qui implique que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\varphi'(x) = -2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -2x.\varphi(x) + 1$$

et

$$\varphi''(x) = -2\varphi(x) - 2x\varphi'(x)$$

Supposons la relation proposée vérifiée pour un certain rang $n+1$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+2)}(x) &= -2x\varphi^{(n+1)}(x) - 2\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n)}(x)\\ &= -2x\varphi^{(n+1)}(x) - 2(n+1)\varphi^{(n)}(x)\end{aligned}$$

et la relation est vraie au rang $n+2$. On conclut par le principe de récurrence.

2. On a $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1, \varphi''(0) = 0$ et par la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi^{(n+1)}(0) = -2n\varphi^{(n-1)}(0)$$

Ainsi, par récurrence :

$$\varphi^{(2p)}(0) = 0, \quad \varphi^{(2p+1)}(0) = (-1)^p 4^p p!$$

Comme φ est C^∞, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut écrire, pour x au voisinage de 0 :

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (-1)^p 4^p \frac{p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^N)$$

3. a) Intégrons par parties en écrivant $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t}(2t.\mathrm{e}^{t^2})\,dt$. On obtient :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,dt$$

b) De même :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t^3}(2t.\mathrm{e}^{t^2})\,dt = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x^3} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{3}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4} dt$$

Donc :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} dt = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \frac{3\mathrm{e}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\,dt$$

c) On a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \mathrm{e}^{x^2}\int_1^x \frac{dt}{t^4} = o\big(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\big)$ et comme on a clairement : $\displaystyle\frac{3\mathrm{e}}{4} = o\big(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\big), \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{4x^3} = o\big(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\big)$, il vient :

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} dt \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} \text{ et } \varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Exercice 4.5.

Une pièce amène «Pile» avec la probabilité p et «Face» avec la probabilité $q = 1 - p$.

On effectue une suite de lancers indépendants. On dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un «changement» ($k \geqslant 2$) s'il donne un résultat différent du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.

X_n est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de changements obtenus au cours des n premiers lancers.

1. Donner la loi et l'espérance de X_2 et X_3.

2. Si $p \neq q$, calculer $P(X_n = 0), P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n - 1)$.

3. Si $p = q$, déterminer la loi de X_n (on pourra procéder par récurrence sur n).

Solution :

1. $\star$ On a $X_2(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et :

$$(X_2 = 0) = (PP) \cup (FF) \implies P(X_2 = 0) = p^2 + q^2$$
$$(X_2 = 1) = (PF) \cup (FP) \implies P(X_2 = 1) = 2(pq)$$

$\star$ De même, $X_3(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et :

$$(X_3 = 0) = (PPP) \cup (FFF) \implies P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$$
$$(X_3 = 1) = (PFF) \cup (PPF) \cup (FPP) \cup (FFP) \implies P(X_3 = 1) = 2(pq^2 + qp^2)$$
$$(X_3 = 2) = (PFP) \cup (FPF) \implies P(X_3 = 2) = p^2q + qp^2$$

2. $\star$ L'événement $(X_n = 0)$ correspond aux tirages $(PP \cdots P)$ ou $(FF \cdots F)$. Donc $P(X_n = 0) = p^n + q^n$

$\star$ L'événement $(X_n = 1)$ correspond aux tirages du type $(PP \cdots PF \cdots F)$ ou $(FF \cdots FP \cdots P)$, le changement intervenant après le premier tirage et avant le dernier. Donc :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (p^k q^{n-k} + q^k p^{n-k}) \\
&= pq^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \big(\frac{p}{q}\big)^{k-1} + qp^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \big(\frac{q}{p}\big)^{k-1} \\
&= pq^{n-1} \frac{1-(\frac{p}{q})^{n-1}}{1-\frac{p}{q}} + qp^{n-1} \frac{1-(\frac{q}{p})^{n-1}}{1-\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

$\star$ L'événement $(X_n = n-1)$ correspond aux tirages $(PFP\cdots)$ ou $(FPF\cdots)$ (avec changement à chaque fois). Donc :

$$P(X_n = n-1) = \begin{cases} p^{n/2} + q^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ p^{(n-1)/2} q^{(n+1)/2} + q^{(n-1)/2} p^{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3. On a, bien entendu, $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.

A chaque lancer, à partir du deuxième, on a une chance sur deux d'obtenir un changement et les résultats des différents lancers sont indépendants. On a donc :

$$P(X_n = k) = \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 4.6.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt$. et $v_n = \dfrac{n^2\pi^2}{2} u_n$.

   a) À l'aide d'un encadrement simple, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

   b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt$ est convergente.

   b) Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt$ est-elle convergente ?

Solution :

1. On effectue le changement de variable affine $u = t - n\pi$. On a alors :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} \sin t dt = 2$$

2. a) Lorsque $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, on a $\dfrac{1}{(n+1)^2\pi^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2\pi^2}$.

et

$$\frac{2}{(n+1)^2\pi^2} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt \leqslant \frac{2}{n^2\pi^2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant v_n \leqslant 1$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

b) On en déduit que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{2}{n^2\pi^2}$, ce qui est le terme général d'une série convergente (Riemann).

3. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t^2}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geqslant \pi$

$$0 \leqslant \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et on sait que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

b) Soit $X > \pi$, et soit N tel que $N\pi \leqslant X < (N+1)\pi$ (on a $N = \lfloor \frac{X}{\pi} \rfloor$). On a alors :

$$\begin{aligned}\int_\pi^X \frac{|\sin t|}{t^2} dt - \sum_{n=1}^{N+1} u_n &= \int_\pi^X \frac{|\sin t|}{t^2} dt - \int_\pi^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt \\ &= \int_X^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt \\ &\leqslant \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt = u_N \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, puisque chaque objet de cette égalité converge.

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

Au voisinage de 0, $\dfrac{|\sin t|}{t^2} \sim \dfrac{1}{t}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 4.7.

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est une fonction de répartition.

Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$. Calculer $P\big(k \leqslant \dfrac{1}{X} \leqslant k + t\big)$.

3. Soit $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Y est une variable aléatoire de même loi que X.

Solution :

1. La fonction F vérifie les conditions d'une fonction de répartition :
- pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- la fonction F est continue, croissante sur $\mathbb{R}$.

Par dérivation, une densité de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{(x+1)\ln 2} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

2. Comme la variable aléatoire X est positive :

$$P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = P\big(\frac{1}{k+t} \leqslant X \leqslant \frac{1}{k}\big) = F\big(\frac{1}{k}\big) - F\big(\frac{1}{k+t}\big)$$

et comme $0 \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{k+t} \leqslant 1$:

$$P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = \frac{1}{\ln 2}\big(\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big)\big)$$

3. On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Soit alors $t \in]0,1]$:

$$(Y \leqslant t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\big)$$

Donc :

$$P(Y \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2}\big(\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big)\big)$$

Or, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big) &= \sum_{k=1}^{N} \ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+1+t) + \ln(k+t) \\ &= \ln(N+1) - \ln(N+1+t) + \ln(1+t) \\ &= \ln\big(\frac{N+1}{N+1+t}\big) + \ln(1+t) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1+t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in [0,1]$, $P(Y \leqslant t) = \dfrac{1}{\ln 2}\ln(1+t)$ et Y a même loi que X.