

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , avec $0 < p < 1$.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise.

1. On note NV (respectivement NB) la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).

Déterminer les lois de NV et NB . Les variables NV et NB sont-elles indépendantes ?

Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini par :

Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement : « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ème}}$ est blanche » ou « les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ème}}$ est verte ».

2. a) Déterminer la loi de X .

b) Montrer que X admet une espérance. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale ?

3. a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .

b) En déduire la loi de Y et montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. $NV \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $NB \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$.

2. a) On a $X(\omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = i)$ est réalisé si les i premières boules obtenues sont blanches et la suivante verte ou si les i premières boules obtenues sont vertes et la suivante blanche. Les tirages ayant lieu avec remise, il vient alors par disjonction et indépendance :

$$P(X = i) = p^i(1-p) + (1-p)^i p$$

b) les séries de termes généraux respectifs ip^i et $i(1-p)^i$ sont convergentes (séries de référence du cours), donc X admet une espérance et :

$$E(X) = (1-p) \sum_{i=1}^{\infty} ip^i + p \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^i = (1-p) \frac{p}{(1-p)^2} + p \frac{1-p}{(1-(1-p))^2}$$

Soit :

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$

Posons $f(p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$, la fonction f est dérivable sur $]0, 1[$, avec :

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

On en déduit que f est minimale pour $p = \frac{1}{2}$ le *minimum* valant 2.

3. a) $(X = i) \cap (Y = j)$ est réalisé si les i premières boules obtenues sont blanches les j suivantes vertes et la suivante blanche ou si les i premières boules obtenues sont vertes les j suivantes blanches et la suivante verte. Toujours par disjonction et indépendance, il vient donc :

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} P[(X = i) \cap (Y = j)] = (1-p)^j \sum_{i=1}^{\infty} p^{i+1} + p^j \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i+1} \\ &= (1-p)^j \frac{p^2}{1-p} + p^j \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} \\ &= p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 p^{j-1} \end{aligned}$$

La convergence des séries rencontrées étant évidente, Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{\infty} j P(Y = j) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + (1-p)^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de Y ne dépend pas de p , et : $E(Y) = 2$.

c) On a, après factorisation :

$$P(X = 1)P(Y = 1) - P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = p(1 - p)(1 - 2p)^2$$

et comme $p \in]0, 1[$, cette quantité n'est nulle que pour $p = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que :

$$p \neq \frac{1}{2} \implies X \text{ et } Y \text{ non indépendantes}$$

Enfin, on vérifie aidément que pour $p = \frac{1}{2}$, alors, quels que soient i et j :

$$P(X = i)P(Y = j) - P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{i+j}} = 0$$

et donc, dans ce cas, X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.2.

Soit n un entier naturel non nul. Un joueur effectue une succession de n parties indépendantes de Pile ou Face. On suppose que la probabilité de gagner chaque partie (obtenir Pile) est de p (et donc de perdre est $q = 1 - p$).

1. On suppose dans cette question $p = \frac{1}{2}$. Soit X_n le nombre de parties gagnées.

a) Déterminer la loi de X_n , ainsi que son espérance et sa variance.

b) Déterminer la probabilité qu'à l'issue de ces n parties, le joueur totalise un nombre de victoires strictement supérieur au nombre de défaites.

2. On suppose maintenant que $0 < p < 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note Y_i la variable aléatoire égale à 1 si la $(i - 1)^{\text{ème}}$ partie se solde par un succès et la $i^{\text{ème}}$ par un échec et qui vaut 0 sinon.

a) Déterminer la loi de Y_i , ainsi que son espérance et sa variance.

b) Soient i et j entiers naturels tels que $2 \leq i < j \leq n$.

Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de (Y_i, Y_j) .

c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$S_n = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n.$$

3. Déterminer la probabilité qu'au cours de ces n parties, un succès ne soit jamais suivi d'un échec.

Solution :

1. a) $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, donc $E(X_n) = \frac{n}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n}{4}$.

b) On a ici $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a $P(X_n = k) = P(X_n = n - k)$.

★ Si n est impair, comme on ne peut avoir autant de victoires que de défaites, la probabilité d'obtenir plus de victoires que de défaites vaut $\frac{1}{2}$.

★ Si n est pair $P(X_n < \frac{n}{2}) + P(X_n = \frac{n}{2}) + P(X_n > \frac{n}{2}) = 1$, donc :

$$P(X_n > \frac{n}{2}) = \frac{1}{2} \left(1 - P(X_n = \frac{n}{2}) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \right)$$

2. a) On a $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$ et $E(Y_i) = pq$, $V(Y_i) = pq(1 - pq)$.

b) $Y_i Y_{i+1}$ est la variable certaine égale à 0, car si Y_{i+1} prend la valeur 1, alors on a un succès à la $i^{\text{ème}}$ épreuve et Y_i prend la valeur 0. Ainsi :

$$\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) = -(pq)^2 \neq 0$$

On en déduit que Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

En revanche, si $j \geq i + 2$, les variables Y_i et Y_j sont fonctions de tirages qui ne se recouvrent pas et donc sont indépendantes.

$$\text{c) } \star E(S) = \sum_{i=2}^n E(Y_i) = (n-1)E(Y_2) = (n-1)pq.$$

★ $V(S) = \sum_{i=2}^n V(Y_i) + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$, et ne survient que les covariances $\text{Cov}(Y_2, Y_3)$, $\text{Cov}(Y_3, Y_4)$, $\dots$, $\text{Cov}(Y_{n-1}, Y_n)$, d'où :

$$\begin{aligned} V(S) &= (n-1)V(Y_2) + 2(n-2)\text{Cov}(Y_2, Y_3) \\ &= (n-1)pq(1-pq) - 2(n-2)p^2q^2 \end{aligned}$$

3. On doit donc obtenir la succession de lancers $S_1 S_2 \dots S_n$, ou $E_1 S_2 \dots S_n$, ou $E_1 E_2 S_3 \dots S_n$, ou $\dots E_1 E_2 \dots E_k S_{k+1} \dots S_n$ ou $\dots$ ou $E_1 E_2 \dots E_n$.

Ainsi la probabilité p_n cherchée vaut : $p_n = \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k}$.

d'où :

$$p_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 4.3.

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A ? Montrer que A est diagonalisable.

b) Montrer que B est diagonalisable et qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

2. On se propose de démontrer que si f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables, alors f et g commutent si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g .

a) Montrer que si f et g admettent une base commune de vecteurs propres, alors $f \circ g = g \circ f$.

On admet que si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable et si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u , alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

b) Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

i) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g .

ii) En déduire que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

Solution :

1. a) Notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A , on a $C_2 = C_1$ et $C_3 = -C_1$, donc :

$$\text{rg } A = 1.$$

★ Le rang de A valant 1, 0 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est le plan d'équation $x + y - z = 0$.

★ 3 est valeur propre de A , avec $E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc A est diagonalisable.

b) De même, on montre que :

★ 2 est valeur propre de B et $E_2(B)$ est le plan d'équation $2x - y + z = 0$.

★ -1 est valeur propre de B et $E_{-1}(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a la chance que chaque droite propre de l'une est contenue dans le plan propre de l'autre et on voit donc que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres pour A et pour B .

On peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Deux matrices diagonales commutent, donc on conclut en se plaçant dans une base commune de vecteurs propres.

b) i) Soit λ une valeur propre de f et $x \in E_\lambda(f)$. On a donc :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

Donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(f)$ est stable par g .

ii) Soit g_λ l'endomorphisme induit par g dans $E_\lambda(f)$. D'après le résultat admis g_λ est diagonalisable.

On peut donc trouver une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(f)$ formée de vecteurs propres pour g_λ , i.e. de vecteurs propres pour g et ces vecteurs sont évidemment propres pour f . Comme f est diagonalisable, en concaténant les familles $\mathcal{B}_\lambda$, pour λ décrivant $\text{Spec}(f)$, on obtient ainsi une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour f et g .

Exercice 4.4.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^x - x - 1$.

- a) Étudier les variations de la fonction f .
- b) Préciser le domaine de convexité de f .

2. On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$.

a) Donner le domaine de définition de g et déterminer les limites au bord de ce domaine de définition.

b) Montrer que g' s'annule en 0 et en deux autres points α et β tels que $\alpha < -1$ et $\beta > 1$ (on ne cherchera pas à calculer α et β). Étudier le signe de la fonction g' .

c) En déduire les variations de g .

d) Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1[$, on a :

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

e) Soit $y > 1$. En déduire que l'on a :

$$\ln\left(\frac{y+1}{y}\right) \leq \frac{1}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

f) Soit p un entier strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant :

$$u_n = \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{pn}$$

Étudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.

Solution :

1. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $f'(x) = e^x - 1$. D'où, l'étude des limites étant banale :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
f	$+\infty$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$	$+\infty$

b) Comme $f''(x) = e^x > 0$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

b) La fonction g est de classe C^∞ sur son domaine de définition, avec :

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2 e^x - 1}{(1-x)^2}$$

Posons $h : x \mapsto (1-x)^2 e^x - 1$, il vient $h'(x) = (x^2 - 1)e^x$, d'où :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0
h	-1	$\nearrow \frac{4}{e} - 1 > 0$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

On voit donc que h , c'est-à-dire g' , s'annule en $\alpha \in]-\infty, -1[$, en 0 (qui est solution évidente) et en $\beta \in]1, +\infty[$, et :

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

c) Ainsi les variations de g sont :

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

d) ★ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}^+$, soit : $\forall x \in]0, 1[, 1 + x \leq e^x$.

★ La fonction g est décroissante sur $[0, 1]$, avec $g(0) = 0$, donc g est négative sur $[0, 1]$, soit : $\forall x \in]0, 1[, e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

e) Si $y > 1$, alors $\frac{1}{y} \in]0, 1[$ et donc :

$$0 \leq \frac{y+1}{y} = 1 + \frac{1}{y} \leq e^{1/y} \leq \frac{1}{1-1/y} = \frac{y}{y-1}$$

Comme la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient bien :

$$\ln\left(\frac{y+1}{y}\right) \leq \frac{1}{y} \leq \ln\left(\frac{y}{y-1}\right)$$

f) Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket n, pn \rrbracket$, on a $k > 1$, donc :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

et, par sommation et télescopage :

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{np}{n-1}\right)$$

et, par le théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln p$.

Exercice 4.5.

On lance une pièce $2n$ fois de suite ($n > 1$). A chaque lancer on obtient Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$ et les résultats des différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Soit X la variable aléatoire qui vaut i si le premier Pile est obtenu au $i^{\text{ème}}$ lancer ($i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$) et 0 si l'on n'obtient jamais Pile.

Calculer la loi et l'espérance de X .

2. Soit Y la variable aléatoire qui vaut j si l'on a obtenu pour la première fois deux résultats identiques aux lancers numéros $j - 1$ et j ($j \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$) et 0 si l'on n'a jamais obtenu 2 résultats consécutifs identiques. Déterminer la loi de Y .

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. $X(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$ et :

★ $(X = 0)$ est réalisé si on a $2n$ échecs consécutifs : $P(X = 0) = q^{2n}$.

★ Pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $(X = k)$ est réalisé si on obtient $(k - 1)$ échecs consécutifs, suivis enfin d'un succès : $P(X = k) = q^{k-1}p$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{2n} kq^{k-1}p.$$

Or, $\forall q \in [0, 1[$, $\sum_{k=0}^{2n} q^k = \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q}$ donne, par dérivation légitime :

$$\forall q \in [0, 1[, \sum_{k=1}^{2n} kq^{k-1} = \frac{1 - (2n+1)q^{2n} + 2nq^{2n+1}}{(1 - q)^2}$$

et

$$E(X) = \frac{1 - (2n+1)q^{2n} + 2nq^{2n+1}}{p}$$

2. $Y(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket \setminus \{1\}$, et :

★ Pour $j \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$, $(Y = j)$ est réalisé si on obtient le même résultat aux rangs j et $j - 1$ (mais il peut s'agir de deux « Pile » ou de deux « Face ») et si les résultats aux rangs $j - 2, j - 3, \dots, 1$ réalisent alors une alternance régulière, il convient donc de distinguer selon la parité de j :

• Si j est impair : $j = 2k + 1, k \geq 1$, on a donc obtenu, avec des notations évidentes : $F_1P_2F_3 \dots P_{2k}P_{2k+1}$ ou $P_1F_2P_3 \dots F_{2k}F_{2k+1}$ et donc, par disjonction et indépendance :

$$P(Y = j) = P(Y = 2k + 1) = q^k p^{k+1} + p^k q^{k+1} = p^k q^k = (pq)^{\frac{j-1}{2}}$$

• Si j est pair non nul, $j = 2k, k \geq 1$, par le même raisonnement, on a obtenu $F_1P_2F_3 \dots F_{2k-1}F_{2k}$ ou $P_1F_2P_3 \dots P_{2k-1}P_{2k}$ et

$$P(Y = j) = P(Y = 2k) = q^{k+1}p^{k-1} + p^{k+1}q^{k-1} = (pq)^{\frac{j}{2}-1}(p^2 + q^2)$$

★ Enfin, on réalise $(Y = 0)$ en réalisant une alternance régulière depuis le premier jusqu'au $(2n)^{\text{ème}}$ lancer, soit :

$$P(Y = 0) = q^n p^n + p^n q^n = 2(pq)^n$$

$P(X = 3) = q^2 p \neq 0$, $P(Y = 3) = pq \neq 0$, mais si $(X = 3)$ est réalisé alors les deux premiers lancers amènent le même résultat !

Donc $P[(X = 3) \cap (Y = 3)] = 0$ et les événements $(X = 3)$ et $(Y = 3)$ ne sont pas indépendants, *a fortiori* :

X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 4.6.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier f et dessiner sa courbe représentative C_f .

2. On pose $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

a) Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{G(x)}{x}$.

c) Etudier les variations de G .

Solution :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

★ Comme $e^x = 1 + x + o(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

★ On a $g'(x) = -xe^x$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}$ et donc f' est négative sur $\mathbb{R}^*$.

★ La poursuite du développement limité donne $g(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, d'où l'on déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$ et par théorème f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Bref f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante, avec $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$.

Enfin, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$ et la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f , au voisinage de $-\infty$. Le dessin s'en déduit.

2. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ et est même de classe $\mathcal{C}^1$.

b) ★ Pour $x > 0$, par décroissance de f sur $[x, 2x]$, il vient :

$$\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} = xf(2x) \leq G(x) \leq xf(x) = \frac{x^2}{e^{2x} - 1}$$

D'où :

$$\lim_{+\infty} G = 0$$

★ Pour $x < 0$, on a de même $xf(2x) \leq G(x) \leq xf(x)$ (ne pas oublier que dans ce cas, on a $2x < x$!!) et donc $f(x) \leq \frac{G(x)}{x} \leq f(2x)$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$$

c) On a $G'(x) = 2f(2x) - f(x) = f(x) \frac{3 - e^x}{e^x + 1}$.

Le signe de $G'(x)$ est donc clair et les variations de G s'en déduisent.

Exercice 4.7.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux ; f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q = (X + 1)P(X + 1) - (X - 1)P(X - 1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = 2; \forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{6}((n+1)u_{n+1} - (n-1)u_{n-1})$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E$ vérifiant : $\forall n \geq 1, u_n = P(n)$.

En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

1. La linéarité de f résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et il suffit de vérifier que les images par f des polynômes de la base canonique de E sont encore des éléments de E :

$$f(1) = (X + 1) - (X - 1) = 2;$$

$$f(X) = (X + 1)(X + 1) - (X - 1)(X - 1) = 4X;$$

$$f(X^2) = (X+1)(X+1)^2 - (X-1)(X-1)^2 = 6X^2 + 2.$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de E .

2. La matrice de f relativement à la base canonique de E est : $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est trigonale supérieure, donc les valeurs de A (ou de f) se lisent sur sa diagonale :

$$\text{Spec } A = \text{Spec } f = \{2, 4, 6\}$$

f a donc 3 valeurs propres et comme $\dim E = 3$, on en déduit que f est diagonalisable et en résolvant les systèmes correspondants, on trouve :

$$E_{(2)}(f) = \text{Vect}(2) ; E_{(4)}(f) = \text{Vect}(X) ; E_{(6)}(f) = \text{Vect}(2X^2 + 1)$$

3. $P \in E$ convient si et seulement si $P(1) = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P(n+1) - (n-1)P(n-1) - 6P(n) = 0$$

Or le seul polynôme qui s'annule en tout point de l'ensemble infini $\mathbb{N}^*$ est le polynôme nul.

On doit donc chercher un polynôme $P \in E$ tel que $P(1) = 2$ et $f(P) = 6P$.

La question précédente montre que la solution est le polynôme $\frac{2}{3}(2X^2 + 1)$.

On a donc : $\forall n \geq 1, u_n = \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}$.