4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

p étant un entier fixé, avec $p \geqslant 2$, on note $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
f est l'application qui à tout polynôme P de E associe :

$$f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E

2. Déterminer l'image et le noyau de f.

3. Soit $A \in E$. A quelle condition l'équation $f(P) = A$ a-t-elle au moins une solution ? Si U est une solution, quelles sont toutes les solutions ?

4. On définit les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ par :

$P_0 = 1, P_1 = X$, et pour $k \geqslant 2, f(P_k) = P_{k-2}$, avec $P_k(0) = P_k(1) = 0$.

a) Montrer que les polynômes $P_0, \ldots, P_p$ sont ainsi bien définis.

b) Pour $k \in [\![0, p]\!]$, quel est le coefficient dominant de P_k ?

Pour $k \geqslant 1$, exprimer P_k à l'aide du polynôme $Q_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$

c) Montrer que $(P_0, \ldots, P_p)$ est une base de E et déterminer la matrice de f relativement à cette base.

Solution :

1. $\star$ Tout d'abord, il est clair que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à p, il en est de même du polynôme $P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

$\star$ D'autre part, par propriétés des opérations, on vérifie aisément que l'on a, pour tous polynômes P et Q de E et tout scalaire λ : $f(P+\lambda Q) = f(P)+\lambda f(Q)$.

Ainsi f est un endomorphisme de E.

2. On a : $f(1)=0$, $f(X)=0$ et pour $k \in [\![2,p]\!]$:

$$f(X^k) = (X+2)^k + X^k - 2(X+1)^k$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{k-i} X^i + X^k - 2\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} (2^{k-i}-2) X^i.$$

Ainsi $f(X^k)$ est un polynôme de degré exactement $k-2$.

$\star$ On a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \ldots, f(X^p)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(X^2), \ldots, f(X^p)\big)$.

Or $f(X^2), \ldots, f(X^p)$ sont des polynômes de degrés échelonnés depuis 0 jusqu'à $k-2$, ils forment donc une base de $\mathbb{R}_{p-2}[X]$, et une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Par conséquent $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{p-2}[X]$.

$\star$ Par le théorème du rang, $\operatorname{Ker} f$ est donc un espace vectoriel de dimension 2, et comme il contient 1 et X, on conclut : $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$.

3. L'équation $f(P) = A$, d'inconnue $P \in E$ admet au moins une solution si et seulement si $A \in \operatorname{Im} f$ et si U est une solution, toutes les solutions sont de la forme $U + a + bX$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, puisque l'on a alors :

$$f(P) = A \iff f(P) = f(U) \iff P - U \in \operatorname{Ker} f.$$

4. a) Les polynômes $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ sont définis dans le texte. Soit alors $k \in [\![1, p-1]\!]$ et supposons $P_0, P_1, \ldots, P_k$ bien définis, avec $\deg P_i = i$.
Comme $\deg P_{k-1} = k-1 \leqslant p-2$, l'équation $f(P) = P_{k-1}$ admet une infinité de solutions, toutes de degré $k+1$ et de la forme $P = U + a + bX$, où U vérifie $f(U) = P_{k-1}$.
Les conditions $P(0) = P(1) = 0$ déterminent parfaitement a et b, ce qui montre qu'il existe une solution au problème et une seule, que l'on note P_{k+1}. On conclut par le principe de récurrence, limité au rang p.

b) Ecrivons $P_k = \alpha_k X^k + \cdots$ et $P_{k-2} = \alpha_{k-2} X^{k-2} + \cdots$.

Le terme de plus haut degré de $f(P_k)$ est $\alpha_k \dbinom{k}{k-2}\big(2^{k-(k-2)} - 2\big) = k(k-1)\alpha_k$.

Ainsi $\alpha_k = k(k-1)\alpha_{k-2}$ et comme $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, il vient :

$$P_k = \frac{1}{k!} X^k + \cdots$$

D'autre part :
on a : $Q_1 = 1, Q_2 = X, \ldots, Q_k = X(X-1)\ldots(X-k+1)$, on trouve alors pour $k \geqslant 2$:

$$f(Q_k) = k(k-1)Q_{k-2}$$

Par conséquent $f\big(\frac{1}{k!}\,Q_k\big) = \dfrac{1}{(k-2)!}Q_{k-2}$,
et comme pour $k \geqslant 2$, on a $Q_k(0) = Q_k(1) = 0$, l'unicité vue en a) donne :

$$\forall\, k \in [\![0,p]\!], P_k = \frac{1}{k!}\,Q_k$$

c) La famille $(P_0, \ldots, P_p)$ est formée de polynômes de degrés échelonnés depuis 0 jusqu'à p, il s'agit donc d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_p[X]$.
Par définition même des polynômes P_i on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.2.

Soit N un entier naturel, tel que $N \geqslant 2$.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi discrète uniforme sur $\{1, 2, \ldots, N\}$.

1. On pose $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) A l'aide de la fonction de répartition de Z_n, donner la loi de probabilité de Z_n.

b) Montrer que l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n vaut :

$$E(Z_n) = N - \sum_{k=1}^{N-1} \big(\frac{k}{N}\big)^n$$

c) Déterminer les limites de l'espérance $E(Z_n)$ et de la variance $V(Z_n)$ de Z_n lorsque n tend vers l'infini.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N-1} \big(\frac{k}{N}\big)^n$.

b) En déduire un équivalent simple de $E(Z_n)$ quand N tend vers l'infini.

3. On pose, pour $k \geqslant 1, Y_k = X_k + X_{k+1}$ et

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

a) Déterminer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

b) Construire, à l'aide de T_n, un estimateur sans biais et convergent de N.

Solution :

1. a) Par définition de sup et indépendance des variables en présence qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1,N\}$, on a :

$$\text{pour } k\in[\![1,N]\!], P(Z_n\leqslant k)=P\big((X_1\leqslant k)\cap\ldots\cap(X_n\leqslant k)\big)=\Big(\frac{k}{N}\Big)^n.$$

On en déduit :

$$\forall\, k\in[\![1,N]\!], P(Z_n=k)=P(Z_n\leqslant k)-P(Z_n\leqslant k-1)=\Big(\frac{k}{N}\Big)^n-\Big(\frac{k-1}{N}\Big)^n$$

(formule valable même pour $k=1$).

b) $E(Z_n)=\sum\limits_{k=1}^{N}k\big(\frac{k}{N}\big)^n-\sum\limits_{k=1}^{N}k\big(\frac{k-1}{N}\big)^n=\sum\limits_{k=1}^{N}k\big(\frac{k}{N}\big)^n-\sum\limits_{k=2}^{N}k\big(\frac{k-1}{N}\big)^n.$

Soit, par glissement de l'indice dans la deuxième somme :

$$E(Z_n)=\sum_{k=1}^{N}k\Big(\frac{k}{N}\Big)^n-\sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\Big(\frac{k}{N}\Big)^n.$$

Puis, par télescopage partiel :

$$E(Z_n)=N-\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^n$$

c) $\star$ Si n tend vers l'infini, N étant fixé, on obtient donc :

$$\lim_{n\to\infty}E(Z_n)=N$$

$\star$ De même : $E(Z_n^2)=\sum\limits_{k=1}^{N}k^2\big(\frac{k}{N}\big)^n-\sum\limits_{k=1}^{N}k^2\big(\frac{k-1}{N}\big)^n,$

et par un calcul analogue :

$$E(Z_n^2)=N^2-\sum_{k=1}^{N-1}(2k+1)\Big(\frac{k}{N}\Big)^n$$

Par négligeabilités classiques, on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty}E(Z_n^2)=N^2$, puis par la formule de Huygens :

$$\lim_{n\to\infty}V(Z_n)=0$$

2. a) On reconnait une somme de Riemann et :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^n=\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$$

b) Donc $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\big(\frac{k}{N}\big)^n=\frac{N}{n+1}+o(N)$ et $E(Z_n)=N-\frac{N}{n+1}+o(N)$, soit :

$$\text{à } n \text{ fixé, } E(Z_n)\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{n}{n+1}N$$

3. a) On a $T_n=\frac{1}{n}\big(X_1+2X_2+2X_3+\cdots+2X_n+X_{n+1}\big).$

Les variables X_k sont indépendantes et toutes de même espérance $\frac{N+1}{2}$ et de même variance $\frac{N^2-1}{12}$. On en déduit :

$E(T_n) = \frac{1}{n}(2n\frac{N+1}{2}) = N+1.$

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}\big(2\,\frac{N^2-1}{12} + 4(n-1)\frac{N^2-1}{12}\big) = \frac{4n-2}{n^2}\,\frac{N^2-1}{12}.$

b) Ainsi $E(T_n - 1) = N$ et $V(T_n - 1) = V(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par conséquent $(T_n - 1)_n$ est un estimateur sans biais et convergent de N.

Exercice 4.3.

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = -\ln x + c + \varepsilon(x)$ où c est une constante réelle que l'on ne calculera pas et ε une fonction qui tend vers 0 avec x.

3. Soit $0 < a < b$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$ converge et donner sa valeur en fonction de f.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$ converge et donner sa valeur.

4. a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver b pour que $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, soit une densité d'une loi de probabilité.

b) Calculer alors l'espérance et la variance de cette loi.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\forall\, t \geqslant 1; 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ donne, par majoration, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$. L'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,dt$ ne posant aucun problème, on conclut :

$$f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

D'autre part, en écrivant $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt - \int_1^x \varphi(t)\,dt$, la continuité de φ prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall\, x > 0, f'(x) = -\varphi(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

2. Effectuons une intégration par parties, directement avec la borne infinie :

$$u'(t) = \frac{1}{t} \Longleftarrow u(t) = \ln t\,;\, v(t) = \mathrm{e}^{-t} \implies v'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

$$f(x) = \Big[\mathrm{e}^{-t}\ln t\Big]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt = -\ln x.\mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$$

En effet : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t = 0$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de l'infini, ce qui prouve que la dernière intégrale écrite converge.

Donc : $f(x) = -\ln x - (\mathrm{e}^{-x}-1)\ln x + \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt.$

Or : $-(\mathrm{e}^{-x}-1)\ln x \underset{(0)}{\sim} x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$; $\mathrm{e}^{-t}\ln t \underset{(0)}{\sim} \ln t$ dont l'intégrale est convergente pour la borne 0. Soit :

$$f(x) = -\ln x + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt + o(1)$$

*Remarque*Ê : on a ainsi une expression de la constante c de l'énoncé.

3. La convergence résultant des calculs effectués, on a :

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$$

et grce aux changements de variables $u = at$ ou $u = bt$:

$$I(x) = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du = f(ax) - f(bx).$$

Ainsi : $I(x) = -\ln(ax) + c + \varepsilon(ax) + \ln(bx) - c - \varepsilon(bx) = \ln\dfrac{b}{a} + o(1)$, soit en passant à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$$

4. a) Il faut bien entendu que la fonction soit positive (donc que $b \geqslant a$) et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1, donc que $\ln\dfrac{b}{a} = 1$ et :

$$b = \mathrm{e}.a$$

b) On a alors $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}at}\big)dt = \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathrm{e}.a} = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}.a}$

On trouve de même, à l'aide d'une intégration par parties $E(X^2) = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{(\mathrm{e}.a)^2}$, et donc :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2(\mathrm{e}-1)}{(\mathrm{e}.a)^2}$$

Exercice 4.4.

Les nombres a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a > b$.
On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite infinie de tirages avec remise, en rajoutant dans l'urne a boules blanches supplémentaires après chaque tirage ayant donné une boule blanche.

1. Déterminer la probabilité de l'événement : « tous les tirages successifs ont donné une boule blanche ».
On notera B_n l'événement : « le tirage numéro n a donné une boule blanche ».
On désigne par X la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage auquel est apparue une boule noire.

2. Donner le domaine de définition de la variable aléatoire X.
Montrer que $(X > k) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k$.
En déduire $P(X > k)$.
3. Etudier l'existence de l'espérance de X dans le cas $a = 2b$.
On pourra démontrer que si une variable Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n.P(X > n) = 0$

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_n$ l'événement « les n premiers tirages ont tous amené une boule blanche ». On a $\mathcal{B}_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$, soit en suivant l'évolution du contenu de l'urne :

$$P(\mathcal{B}_n) = \frac{b}{2b} \times \frac{b+a}{2b+a} \times \cdots \times \frac{b+(n-1)a}{2b+(n-1)a} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+ka}{2b+ka}$$

L'événement TB = « tous les tirages amènent une boule blanche » n'est autre que l'événement $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ et comme la suite $(\mathcal{B}_n)_n$ est une suite décroissante d'événements, il vient par le théorème de limite monotone :

$$p = P(TB) = \lim_{n\to\infty} P(\mathcal{B}_n).$$

Or : $\ln\big(P(\mathcal{B}_n)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\big(\dfrac{b+ka}{2b+ka}\big) = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\big(1 + \dfrac{b}{b+ka}\big)$.

On a $\ln\big(1+\dfrac{b}{b+ka}\big) \underset{(k\to\infty)}{\sim} \dfrac{b}{ka}$, qui est le terme général d'une série divergente.

Comme $\ln\big(1+\dfrac{b}{b+ka}\big) > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\big(1+\dfrac{b}{b+ka}\big) = +\infty$, donc que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\big(P(\mathcal{B}_n)\big) = -\infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathcal{B}_n) = 0.$$

Ainsi $P(TB) = 0$ (il est quasi-impossible de n'obtenir jamais que des boules blanches).

2. La variable aléatoire X est définie presque partout (puisque TB a une probabilité nulle, ce qui permet de dire que X est une variable aléatoire) et est clairement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$(X > n)$ est réalisé si et seulement si les n premiers tirages ont tous amenés une boule noire, donc $(X > k) = B_1 \cap \ldots \cap B_n = \mathcal{B}_n$.

$$P(X > n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+ka}{2b+ka}$$

3. Si $a = 2b$, on obtient :

$$P(X > n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+2k}{2+2k} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} = \frac{(2n)!}{[2^n.n!]^2}$$

On peut remarquer que $3 > 2$, $5 > 4$, $\ldots$, $2n-1 > 2n-2$, et donc $P(X > n) > \dfrac{1}{2n}$.

Or si X admet une espérance, on a :

$$\begin{aligned} nP(X > n) &= nP(X = n+1) + nP(X = n+2) + \cdots \\ &\leqslant (n+1)P(X = n+1) + (n+2)P(X = n+2) + \cdots \end{aligned}$$

Donc $nP(X > n)$ est inférieur au reste d'ordre n d'une série convergente et a alors pour limite 0, ce qui est contredit par le résultat $nP(X > n) > \dfrac{1}{2}$.

En conclusion X n'a pas d'espérance.

Exercice 4.5.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\, dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et équivalente au voisinage de 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$; la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de l'intégrale, et :

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

2. Si $x_1 < x_2$, alors $\forall t \in [0,1], \dfrac{\mathrm{e}^{-x_1 t}}{\sqrt{t}} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x_2 t}}{\sqrt{t}}$, et par conservation des inégalités par intégration (les bornes sont dans l'ordre croissant) : $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, donc :

$$f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2.$

Lorsque t décrit $[0,1]$, e^{-xt} varie entre 1 et e^{-x}, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}$ varie entre $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{t}}$.

Ainsi $f(x)$ est compris entre 2 et $2.\mathrm{e}^{-x}$ et, par encadrement :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

(si on veut écrire des inégalités, il faut distinguer selon le signe de x).

4. a) Le changement de variable $u = xt$ donne, pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$$

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$ prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) ...et donne en plus $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$.

Le changement de variable $u = \dfrac{x^2}{2}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(intégrale de référence), soit :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

Exercice 4.6.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi à densité de fonction de répartition F.
On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) < 1$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit une variable aléatoire N_x par

$$N_x = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\right\}$$

1. Déterminer la loi de N_x ainsi que son espérance en fonction de $F(x)$.

2. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x. Déterminer

$$\lim_{u\to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \ln(1-u)$$

3. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} P\left[N_x > E(N_x)\right] = \mathrm{e}^{-1}$$

Solution :

1. N_x est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(N_x = k)$ est réalisé si et seulement si on réalise $(X_1 \leqslant x)$, $(X_2 \leqslant x)$, ..., $(X_{k-1} \leqslant x)$ et $(X_k > x)$.

[Si $k = 1$ seul subsiste l'événement $(X_1 > x)$]

Comme les variables en présence sont indépendantes et ont toutes la même loi, il vient, même pour $k = 1$:

$$P(N_x = k) = \big(F(x)\big)^{k-1}\big(1 - F(x)\big)$$

On reconnaît : $N_x \hookrightarrow \mathcal{G}\big(1 - F(x)\big)$ et $E(N_x) = \dfrac{1}{1 - F(x)}$.

[Notons que le calcul précédent montre que N_x est bien une variable aléatoire]

2. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc pour $x \geqslant 1$, $1 \leqslant \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$.

Ainsi, par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor} = 1$, ou : $\lfloor x \rfloor \underset{(+\infty)}{\sim} x$.

D'où : $\left\lfloor \dfrac{1}{u} \right\rfloor \ln(1 - u) \underset{(0^+)}{\sim} \dfrac{1}{u}(-u)$, soit :

$$\lim_{u \to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \ln(1 - u) = -1.$$

3. $\star$ Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $P(N_x > n) = \big(F(x)\big)^n$ (car cela signifie que les n premières variables X_k ont pris chacune une valeur inférieure ou égale à x).

$\star$ N_x ne prenant que des valeurs entières, on a :

$$\begin{aligned} P\big(N_x > E(N_x)\big) &= P\Big(N_x > \Big\lfloor \frac{1}{1 - F(x)} \Big\rfloor\Big) = \big(F(x)\big)^{\lfloor \frac{1}{1 - F(x)} \rfloor} \\ &= \exp\Big[\Big\lfloor \frac{1}{1 - F(x)} \Big\rfloor \ln\big(1 - (1 - F(x))\big)\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - F(x)] = 0$, le résultat de la question 2. donne, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \to +\infty} P\big(N_x > E(N_x)\big) = \mathrm{e}^{-1}$$

Exercice 4.7.

Soit f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n(x) = (\sin x).\mathrm{e}^{-nx}$$

1. Pour quelles valeurs de n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge-t-elle ?

2. Calculer I_n pour $n \geqslant 1$ et en déduire que la série de terme général I_n est convergente.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$ est convergente. On note I sa valeur.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, e^{-nt}\, dt = 0$.

c) En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Solution :

1. L'intégrale définissant I_n est impropre pour la borne $+\infty$.

$\star$ On a $f_0(x) = \sin x$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ est évidemment divergente.

$\star$ Pour $n > 1$, on a $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$ et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$ montre que I_n est (absolument) convergente.

$$I_n \text{ converge} \iff n \geqslant 1$$

2. $\star$ On sait que la fonction $x \mapsto e^{-nx} \sin x$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto e^{-nx}(a \cos x + b \sin x)$.
En dérivant et en identifiant, on trouve $a = -\dfrac{1}{1+n^2}$ et $b = -\dfrac{n}{1+n^2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^X f_n(x)\, dx &= \Big[-e^{-nx}\big(\frac{1}{1+n^2}\cos x + \frac{n}{1+n^2}\sin x\big)\Big]_0^X \\ &= \frac{1}{1+n^2} - e^{-nX}\big(\frac{1}{1+n^2}\cos X + \frac{n}{1+n^2}\sin X\big)\end{aligned}$$

et, en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

$\star$ Comme $0 \leqslant I_n < \dfrac{1}{n^2}$, la règle de Riemann montre que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n$ est une série convergente.

3. a) On a $\dfrac{\sin x}{e^x - 1} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, donc la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 et étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il ne reste à régler que le problème pour la borne infinie.

Pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\sin x}{e^x - 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1} \underset{(+\infty)}{\sim} e^{-x}$. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ prouve la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx$:

$$I \text{ existe}$$

b) La fonction $t \mapsto \left|\dfrac{\sin t}{e^t - 1}\right|$, prolongée par $0 \mapsto 1$, est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$. Par conséquent cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et si on pose $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\right|$, on a : $\left|\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{e}^{-nt}\right| \leqslant M.\mathrm{e}^{-nt}$, ce qui prouve, d'une part que l'intégrale proposée est (absolument) convergente, et d'autre part que l'on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} M.\mathrm{e}^{-nt}dt = \frac{M}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Par linéarité de l'intégration pour les intégrales convergentes, on a :

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_0^{+\infty} \sin x\big(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \cdots + \mathrm{e}^{-nx}\big)dx$$

Pour $x > 0$, nous sommes en présence de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1, donc :

$$\sin x\big(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \cdots + \mathrm{e}^{-nx}\big) = \sin x \times \mathrm{e}^{-x}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-nx}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}(1 - \mathrm{e}^{-nx})$$

et ce résultat est encore valable pour $x = 0$, en convenant de prolonger par continuité.

Ainsi, toujours par linéarité de l'intégration, dans le cas de la convergence :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 1} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{e}^{-nx}dx.$$

et en passant à la limite :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$$

Exercice 4.8.

Un joueur joue au casino une succession de parties indépendantes ; à chaque partie, la probabilité qu'il a de gagner un euro est égale à q et celle de perdre un euro est égale à $r = 1 - q$.

Au départ le joueur a une cagnotte de k euros.

Soit N un nombre entier strictement supérieur à k.

1. Le jeu s'arrête dès que le joueur est ruiné ou dès qu'il a en sa possession la somme de N euros. On note p_k la probabilité que le joueur finisse ruiné (noter que p_k dépend aussi de N et de q).

a) Que vaut p_0 ? Que vaut p_N ?

b) Déterminer une relation entre p_{k-1}, p_k et p_{k+1}, pour k compris entre 1 et $N - 1$.

c) En déduire p_k en fonction de k (et de N).

On sera amené à distinguer deux cas : $q = \frac{1}{2}$ et $q \neq \frac{1}{2}$.

2. Saisi par le démon du jeu, le joueur oublie sa décision de s'arrêter dès qu'il possède N euros.
Quelle est la probabilité qu'il finisse ruiné ?

Solution :

1. a) $\star$ $p_0 = 1$: le joueur a une cagnotte initiale de 0 euro, donc il est ruiné avant même de jouer.

$\star$ $p_N = 0$: si au départ le joueur dispose de N euros, il ne joue pas, donc il ne peut pas être ruiné.

b) Comme $k \in [\![1, N-1]\!]$, le joueur joue au moins une fois, et on établit une relation de récurrence, en conditionnant par le résultat de la première partie.
Soit $B =$ « le joueur perd la première partie » et $A_k =$ « le joueur finit ruiné avec une fortune initiale de k euros ».
On a : $P(A_k) = P(A_k/B)P(B) + P(A_k/\overline{B})P(\overline{B})$.
Ce qui donne :

$$p_k = p_{k-1}(1-q) + p_{k+1}q$$

En effet, si le joueur perd la première partie, tout se passe alors comme si il commençait à joueur avec une fortune initiale de $k-1$ euros, donc $P(A_k/B) = p_{k-1}$. On a de même $P(A_k/\overline{B}) = p_{k+1}$.

c) On a affaire à une suite (finie) vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique de cette récurrence est $qx^2 - x + 1 - q = 0$. Ses racines sont 1 et $\alpha = \dfrac{1-q}{q} = \dfrac{r}{q}$.

$\star$ Si $q \neq \dfrac{1}{2}$, alors $1 - q \neq q$ et $\alpha \neq 1$.
Il existe donc λ et μ réels tels que $\forall\, k \in [\![0, N]\!], p_k = \lambda.1^k + \mu.\alpha^k$;
les conditions aux limites $p_0 = 1$ et $p_N = 0$ donnent $\lambda = \dfrac{\alpha^N}{\alpha^N - 1}$ et $\mu = \dfrac{1}{1-\alpha^N}$, soit :

$$p_k = \frac{\alpha^k - \alpha^N}{1 - \alpha^N}$$

$\star$ Si $q = \dfrac{1}{2}$, 1 est racine double.
Il existe alors λ et μ réels tels que $\forall\, k \in [\![0, N]\!], p_k = \lambda + k\mu$, et les conditions aux limites donnent :

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

2. Pour traduire le fait que le joueur ne s'arrête jamais volontairement, il suffit de faire tendre N vers l'infini.

$\star$ Si $1 - q > q$ (*i.e.* $q < \dfrac{1}{2}$ et le jeu est défavorable au joueur), alors $\alpha > 1$ et $p_k(N) \underset{(N\to\infty)}{\sim} \dfrac{\alpha^N}{\alpha^N} = 1$, donc $\lim\limits_{N\to\infty} p_k(N) = 1$ et le joueur est quasi-certain de se ruiner.

$\star$ Si $q = \dfrac{1}{2}$, on a encore $\lim\limits_{N\to\infty} p_k(N) = 1$ et la conclusion est la même.

$\star$ Si $1 - q < q$ (*i.e.* $q > \dfrac{1}{2}$ et le jeu est favorable au joueur), alors $\alpha < 1$ et $\lim\limits_{N\to\infty} p_k(N) = \alpha^k$. Le joueur n'est plus quasi-certain de se ruiner (et la probabilité qu'il se ruine est une fonction décroissante de sa fortune initiale k).