1

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, $(n \geqslant 2)$. Soit f un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité et pour tout j entier naturel, f^j représente l'endomorphisme de E défini par :

$$f^0 = I, \text{ et si } j \geqslant 1, f^j = f \circ f^{j-1}$$

On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que :

$$f^{n-1}(x) \neq 0, \text{ et } f^n(x) = 0$$

1. Montrer que $\big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

2. On pose $\mathcal{F} = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\big\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et qu'une base de $\mathcal{F}$ est $(I, f, \ldots, f^{n-1})$.

3. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et que la matrice associée à f dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice et déterminer $\mathcal{F}$.

Solution :

1. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = 0$.

En appliquant f^{n-1}, il reste $a_0 f^{n-1}(x) = 0$, d'où $a_0 = 0$;
En appliquant maintenant f^{n-2}, il reste $a_1 f^{n-1}(x) = 0$, d'où $a_1 = 0$;
et ainsi de suite. Donc tous les coefficients sont nuls et la famille est bien libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de l'espace, on a :

$$\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big) \text{ est une base de } E$$

2. $\star$ $\mathcal{F}$ est non vide, car il contient l'endomorphisme nul, f, id, etc. De plus, en vertu des propriétés des opérations, $\mathcal{F}$ est stable par combinaison linéaire. Donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

$\star$ • Clairement $id, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ commutent avec f, donc f commute avec toute combinaison linéaire de ces endomorphismes.

• Soit g qui commute avec f, alors $g(x)$ se décompose sur la base précédente :

$$\exists!(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x),$$

et g commute avec les puissances de f, donc :

$$g\big(f^p(x)\big) = f^p\big(g(x)\big) = f^p\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\Big)\big(f^p(x)\big)$$

Ainsi les endomorpismes g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur la base $\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$, donc sont égaux, ce qui prouve que $g \in \text{Vect}\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$.

• Enfin $\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$ est une famille libre, puisque si $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$, alors en particulier $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = 0$ et on sait que ceci entraîne la nullité de tous les coefficients.

Ainsi $\mathcal{F} = \text{Vect}\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$, la famille $\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$ est une base de $\mathcal{F}$.

3. On a $f(e_n) = e_{n-1}$, $f(e_{n-1}) = e_{n-2}, \dots, f(e_2) = e_1$ et $f(e_1) = 0$.
Ainsi f vérifie les conditions précédentes avec $x = e_n$.
Les matrices de $f^2, f^3, \dots$ s'obtiennent par simples décalages et $\mathcal{F}$ est donc formé des endomorphismes associés aux matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.2.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 + (1 + f'(x))^2 = 1$$

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f admet une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe une suite (x_n) telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \to +\infty} f'(x_n) = 0$$

4. En déduire f.

Solution :

1. Supposons qu'il existe un point x tel que $f'(x) > 0$, alors $1 + f'(x) > 1$ et la condition de l'énoncé est impossible. Donc $\forall\, x, f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante.

2. La condition de l'énoncé impose d'avoir $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Ainsi f est monotone et bornée, donc admet une limite (finie) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel il existe A tel que $x \geqslant A$ implique $f'(x) \leqslant -\varepsilon$, alors pour $x \geqslant A$, il vient en intégrant :

$$f(x) - f(A) \leqslant -\varepsilon(x - A)$$

Et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.
Ainsi : $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, A, \exists\, x \geqslant A$, tel que $-\varepsilon \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et $A = n$, il existe donc $x_n \geqslant n$ tel que $-\dfrac{1}{n} \leqslant f'(x_n) \leqslant 0$.
On a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(x_n) = 0$.

4. Par la relation de définition : $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(x_n) = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$ et puisque f admet une limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Le même raisonnement que celui fait dans la question précédente montre qu'il existe une suite (y_n) tendant vers $-\infty$ et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(y_n) = 0$, donc telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
La fonction f étant monotone, on en conclut $f = 0$.
Réciproquement la fonction nulle vérifie évidemment la propriété exigée.

Exercice 4.3.

1. Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π.

Montrer que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \int_{0}^{2\pi} g(t)\,dt$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^n dt$ et l'on considère l'application f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos t)dt$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que c'est une fonction paire.

Dorénavant on considère que x est élément de $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [-\pi,\pi]$,

$$\exp(x\cos t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!} + R_n(x,t)$$

où

$$|R_n(x,t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Montrer que : $|R_n(x,t)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)$.

4. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} I_k\Big| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} I_n$.

Solution :

1. Plus généralement, soit $x \in \mathbb{R}$ et $h : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{x+2\pi} g(t)\,dt$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g(x+2\pi) - g(x) = 0$, donc h est constante et en particulier $h(0) = h(-\pi)$.

2. $\star$ Pour tout x, la fonction à intégrer est continue sur $[-\pi,\pi]$ et f est bien définie.

$\star$ On a $f(-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-x\cos t)\,dt$.

Par le changement de variable $u = t+\pi$, $f(-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \exp(x\cos u)\,du$ et en appliquant le résultat précédent : $f(-x) = f(x)$.

3. $\star$ Par convergence de la série exponentielle :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \exp(x\cos t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k \cos^k t}{k!}$$

et, pour $x \geqslant 0$, $\left|R_n(x,t)\right| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x^k \cos^k t}{k!}\Big| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = R'_n$

$\star$ $R'_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\big(1 + \dfrac{x}{n+2} + \dfrac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \dfrac{x^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\big)$.

Or $n+2 \geqslant 1$, $(n+2)(n+3) \geqslant 2!$, ... Par conséquent :

$$R'_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x$$

4. En plaant tout sous la même intégrale :

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} I_k\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\exp(x\cos t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!}\Big| dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(x)\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (il s'agit même du terme général d'une série convergente) et donc, par encadrement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} I_k$$

Exercice 4.4.

1. Pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{n,p} = \int_1^{+\infty} t^n \exp(-pt)\, dt$$

a) Montrer que ces intégrales convergent.

b) Déterminer une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$ et en déduire $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

2) Soit $\lambda > 0$, on pose $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X et donner sa fonction de répartition.

Un appareil possède n composants ($n \in \mathbb{N}^*$). Chacun des composants a une durée de vie donnée par une variable aléatoire dont f est une densité. On supposera ces variables indépendantes.

3. L'appareil tombe en panne dès que l'un (au moins) de ses composants tombe en panne (montage en série). Soit Y la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil.

Exprimer l'espérance $E(Y)$ de Y, en fonction des intégrales de la question 1.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue sur $[1,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.t^n \mathrm{e}^{-pt} = 0$. La règle de Riemann donne alors la convergence de l'intégrale proposée.

En intégrant par parties : $\displaystyle\int_1^X t^n.\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \frac{X^n}{p}\mathrm{e}^{-pX} - \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{n}{p}\int_1^X t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\,dt$

et en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$:

$$\forall\, n \geqslant 1, I_{n,p} = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{n}{p} I_{n-1,p}$$

Posons alors $u_n = \dfrac{I_{n,p}}{n!}$, on obtient : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{p}u_{n-1}$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{p}u_{n-1} \\ u_{n-1} &= \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{p}u_{n-2} \\ & \vdots \\ u_1 &= \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{p}u_0 \end{cases}$$

On multiplie alors la deuxième relation par $\dfrac{1}{p}$, la troisième par $\dfrac{1}{p^2}$, …puis on somme. Puisque $u_0 = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}$, il vient : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^k(n-k)!}$, soit :

$$I_{n,p} = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{p^k}\mathrm{C}_n^k$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive. On vérifie que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, ce qui résultera d'ailleurs du calcul suivant.

En intégrant par parties dans le cas $x \geqslant 0$, on obtient :

$$F_X(x) = 0, \text{ si } x \leqslant 0 \text{ et } F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}, \text{ si } x \geqslant 0.$$

3. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$, les variables X_i étant indépendantes de même loi que X : $P(Y > x) = P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\big) = [P(X > x)]^n$. D'où :

$$P(Y \leqslant x) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^n$$

Par dérivation, on en déduit une densité f_Y de Y :

$$\forall\, x \leqslant 0, f_Y(x) = 0 \text{ et } \forall\, x > 0, f_Y(x) = nf(x)\big(1 - F_X(x)\big)^{n-1}$$

Soit : $\forall\, x > 0, f_Y(x) = n\lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda n x}(\lambda x + 1)^{n-1}$.

La convergence de l'intégrale étant évidente, on a :

$E(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} n\lambda^2 x^2.\mathrm{e}^{-\lambda n x}(\lambda x + 1)^{n-1}\,dx$,

et en effectuant le changement de variable $u = \lambda x + 1$:

$$E(Y) = n\lambda e^n \int_1^{+\infty} (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) e^{-nu}\, du, \text{ i.e. :}$$
$$E(Y) = n\lambda e^n (I_{n+1,n} - 2I_{n,n} + I_{n-1,n})$$

Exercice 4.5.

On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées $1, 2, \ldots, N$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule avec remise à chaque fois de la boule tirée. Soit $r \in [\![1, N]\!]$. On choisit r numéros entre 1 et N et l'on note Y_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les r numéros choisis.

1. Dans cette question, $r = 1$. Déterminer la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question,$r = 2$. Déterminer la loi de Y_2, son espérance (on vérifiera que la somme des probabilités vaut 1).

3. Désormais, r est quelconque.
   a) Déterminer $Y_r(\Omega)$.
   b) Calculer $P(Y_r = r)$.
   c) Déterminer l'espérance de Y_r.

Solution :

1. Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{N}$, donc :
$$E(Y_1) = N \text{ et } V(Y_1) = N(N-1).$$

2. On a $Y_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit alors $n \geqslant 2$; l'événement $(Y_2 = n)$ est réalisé si on obtient un des deux numéros choisis à un certain rang k compris entre 1 et $n-1$, puis le deuxième numéro choisi au n-ième tirage. Ainsi les tirages dont le rang est compris entre 1 et $k-1$ (s'il y en a) amènent l'un des $N-2$ autres numéros, le k-ième tirage amène l'un des deux numéros choisis, les tirages de rang compris entre $k+1$ et $n-1$ (s'il y en a) n'amènent pas l'autre numéro choisi et le n-ième tirage amène l'autre numéro choisi. Bref, par équiprobabilité de toutes les listes de tirages :

$$P(Y_2 = n) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} (N-2)^{k-1} 2(N-1)^{n-k-1}$$
$$= \frac{2(N-2)^{n-2}}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$$

Par l'identité géométrique, on en déduit, après simplification :
$$\forall n \geqslant 2, P(Y_2 = n) = \frac{2}{N}\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1}\right)$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer $P(Y_2 \geqslant n)$, pour en déduire la loi de Y_2 par différence ...

Par sommation de séries géométriques convergentes :

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(Y_2 = n) = \frac{2}{N}\Big(\frac{1}{1-\frac{N-1}{N}} - \frac{1}{1-\frac{N-2}{N}}\Big) = \frac{2}{N}\big(N - \frac{N}{2}\big) = 1$$

3. a) $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty [\![$.

b) $(Y_r = r)$ est réalisé si et seulement si les r premiers tirages amènent les r numéros choisis, mais dans un ordre quelconque, donc :

$$P(Y_r = r) = \frac{r!}{N^r}$$

c) Pour $i \in [\![2, r]\!]$, notons X_i la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un i-ième numéro choisi, après en avoir déjà obtenu $i-1$, et X_1 la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un premier numéro choisi.
On a $Y_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ et pour tout i, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{r-i+1}{N}$, d'où :

$$E(Y_r) = N\big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\big)$$

Exercice 4.6.

On considère l'application f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ f(t) = \frac{A}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$$

où A est une constante réelle.

1. Déterminer A pour que f soit une densité de probabilité.

2. On suppose que A a la valeur trouvée précédemment et on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. Montrer que X admet des moments à tous les ordres.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\, dt$.

Montrer que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, I_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt + R_N$$

avec

$$R_N = (-1)^{N+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} dt$$

4. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N = 0$, et en déduire une expression de I_n sous forme de série.

Solution :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$, paire , positive si $A \geqslant 0$ et en écrivant $f(t) = A\,\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$, il vient : $\displaystyle\int_0^X f(t)\,dt = A(\operatorname{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) - \operatorname{Arc}\tan 1) = A(\operatorname{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) - \frac{\pi}{4})$.
Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \operatorname{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^+$ est convergente, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = A\frac{\pi}{4}$.

Bref, par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = A\frac{\pi}{2}$ et f est une densité de probabilité pour $A = \dfrac{2}{\pi}$.

2. Par négligeabilité classique et parité : $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} t^2.t^n f(t) = 0$, ce qui prouve que l'intégrale définissant le moment d'ordre n de X est absolument convergente. Donc X admet des moments de tous ordres (et par parité les moments d'ordre impair sont nuls).

3. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$ et par l'identité géométrique (la raison valant $-\mathrm{e}^{-2t}$, donc étant différente de 1) :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{-2kt} + (-1)^{N+1}\frac{\mathrm{e}^{-2(N+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$$

Ainsi : $\displaystyle\frac{t^{2n}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^{2n} \mathrm{e}^{-(2k+1)t} + \frac{(-1)^{N+1}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}t^{2n}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$

Toutes les intégrales écrites étant convergentes, par négligeabilité classique, on en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N}, I_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2k+1)t}dt + R_N$$

avec :

$$R_N = (-1)^{N+1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}dt$$

4. On a :
$\displaystyle|R_N| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2N+2)t} g(t)\,dt$, avec : $g(t) = t^{2n}\mathrm{e}^{-t}$.
La fonction g est positive, continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée
sur $\mathbb{R}^+$ et si on note $M = \sup_{\mathbb{R}^+} g$, alors $\displaystyle|R_N| \leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2N+2)t}\,dt = \frac{M}{2N+2}$.
Ceci montre que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 0$ et donc :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n} \mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt$$

Notons que le changement de variable $u = (2k+1)t$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} \mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt = \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n} \mathrm{e}^{-u} du = \frac{(2n)!}{(2k+1)^{2n+1}},$$

ce qui permet d'écrire I_n comme somme d'une série numérique explicite.

Exercice 4.7.

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est–elle diagonalisable ?

2. Calculer A^n, pour tout n entier naturel.

3. Montrer que l'inverse A^{-1} de A existe, et calculer A^{-n}, pour tout n entier naturel.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X = n)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+2} = -p_{n+1} + \frac{3}{4} p_n$.
Déterminer l'expression de p_n en fonction de n, et reconnaître la loi suivie par X.

5. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 6.\mathrm{e}^{-3x/2} + 2.\mathrm{e}^{2x}, \qquad g(x) = -3.\mathrm{e}^{-3x/2} + 3.\mathrm{e}^{2x}$$

a) Exprimer les dérivées f' et g' en fonction de f et g.

b) Comment déterminer une fonction F, combinaison linéaire de f et g, telle que la dérivée 2002$^{\text{ème}}$ de F soit f ?

Solution :

1. Les valeurs propres de A sont $-3/2$ et $1/2$ et :

$$E_{-3/2}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme A est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres, A est diagonalisable. Plus précisément si $P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$ et :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$, ce qui conduit à :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^{n+2}} + \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} & \dfrac{3}{2^{n+3}} - \dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} \\ \dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n} & \dfrac{3}{2^{n+2}} + \dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

3. Comme 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible et le calcul précédent est valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$; la relation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, d'où $X_n = A^n X_0$, et on pourrait achever le calcul matriciellement, ce qui prouve que p_n est combinaison linéaire de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$: $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, p_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(-\frac{3}{2}\right)^n$.
On peut calculer λ et μ en fonction de p_0 et p_1 (ce que l'on peut aussi voir directement en étudiant la récurrence linéaire d'ordre 2 de définition).

Il vaut mieux remarquer qu'une probabilité devant être toujours comprise entre 0 et 1, on a nécessairement $\mu = 0$, d'où $p_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et la somme des probabilités valant 1, on a $\lambda = \frac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Ainsi, $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. a) On a : $f' = -f + g$ et $g' = \frac{3}{4}f$, soit $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = A^{2002}A^{-2002}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. On peut donc choisir pour fonction F le premier élément de la matrice $A^{-2002}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, ce qui conduit à :

$$F = 2^{2000}\left[(1 + \frac{1}{3^{2001}})f + \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{2002}})g\right]$$

Exercice 4.8.

E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie et f et g sont deux applications linéaires de E dans F.

On rappelle que le rang d'une application linéaire u, noté $\mathrm{rg}(u)$, est la dimension de son image $\mathrm{Im}(u)$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. En déduire que :

$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

b) Montrer que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

2. Dans cette question, on suppose que l'on a $E = F$ et que f et g sont tels que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$$

a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E, ainsi que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.

c) En conclure que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Solution :

1. a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f+g)$, il existe $z \in E$ tel que $x = (f+g)(z) = f(z) + g(z)$. Or $f(z) \in \mathrm{Im}\, f$ et $g(z) \in \mathrm{Im}\, g$, donc $x \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$, ce qui donne l'inclusion voulue.

D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f+g) = \dim \mathrm{Im}(f+g) &\leqslant \dim(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g) \\ &\leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \\ &\leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \end{aligned}$$

b) On a $f = (f+g) + (-g)$, donc : $\mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g)$.

De même $g = (f+g) + (-f)$, et : $\mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(f)$.

Ainsi $\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$ et $\mathrm{rg}\, g - \mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$, soit :

$$|\,\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$$

2. Notons $n = \dim E$. Le théorème du rang permet d'écrire :

$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n \quad (1)$; $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = n \quad (2)$

$\dim \mathrm{Im}(f+g) + \dim \mathrm{Ker}(f+g) = n \quad (3)$

Et les hypothèses donnent :

$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) = n \quad (4)$

$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = n \quad (5)$

a) En faisant $(1) + (2) - (4) - (5)$, il vient :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$

D'où : $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$

b) Donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ et par (4) $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g = n$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont supplémentaires dans E.

De même $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ et (5) montrent que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ sont supplémentaires dans E.

c) Le premier résultat de la question b) montre que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n$. Il reste donc à montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = n$, *i.e.* que $f+g$ est surjectif, ce qui équivaut à dire que $f+g$ est injectif ($f+g$ est un endomorphisme de E qui est de dimension finie).

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. On a donc $g(x) = -f(x)$.

Or $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, donc $g(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ et $g(x) = 0$.

Par conséquent $g(x) = f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$, soit $x = 0$.

Ainsi $f+g$ est bien injectif, donc surjectif et $\mathrm{rg}(f+g) = n$, ce qu'il fallait démontrer.