4

OPTION B/L

Exercice 1.

On définit une suite (f_n) de fonctions sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f_0(x) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f_{n+1}(x) = \int_0^x (1 + f_n^2(t))dt$$

1. a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fixé, la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_n$ est positive et croissante.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fixé, la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_n$ est majorée par le réel $\tan(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fixé, la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_n$ est convergente. On note $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale dont on donnera le degré en fonction de n.

b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme de plus bas degré de f_n.

c) Calculer $f_n'(0)$ et $f_n''(0)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$0 \leq f_n'(x) \leq 2$$

En déduire que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Solution :

1. a) On a : $f_0(x)=0$ et $f_1(x)=x$, donc $\forall\, x\in[0,\pi/4], 0\leqslant f_0(x)\leqslant f_1(x)$.
Supposons que pour un certain rang n, on a : $\forall\, x\in[0,\pi/4], 0\leqslant f_{n-1}(x)\leqslant f_n(x)$, alors :
$\forall\, x\in[0,\pi/4], 0\leqslant \displaystyle\int_0^x \big(1+f_{n-1}^2(t)\big)\,dt\leqslant \int_0^x\big(1+f_n^2(t)\big)\,dt$, c'est-à-dire :
$\forall\, x\in[0,\pi/4], 0\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$. On conclut par le principe de récurrence.

b) On a $\forall\, x\in[0,\pi/4], f_0(x)\leqslant \tan x$, et si pour un certain rang n, on a : $\forall\, x\in[0,\pi/4], f_n(x)\leqslant\tan x$, alors :
$\forall\, x\in[0,\pi/4], f_{n+1}(x)\leqslant \displaystyle\int_0^x(1+\tan^2 t)\,dt=\tan x$. On conclut encore par le principe de récurrence.

c) La suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc est convergente.

2. a) f_0 est une fonction polynomiale (de degré $-\infty$), f_1 est polynomiale de degré 1 et si on suppose que pour un certain rang n, f_n est polynomiale de degré d_n, alors $1+f_n^2$ est polynomiale de degré $2d_n$ et la primitive nulle en 0 de cette fonction, qui n'est autre que f_{n+1}, est polynomiale de degré $d_{n+1}=2d_n+1$.

$\star$ Par récurrence : $\boxed{\forall\, n,\ f_n \text{ est polynomiale}}$

$\star$ La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique et $d_{n+1}+1=2(d_n+1)$ donne :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, d_n=2^n-1}$$

b) On a $f_n(0)=0$, donc f_n est de la forme $xQ_n(x)$, où Q_n est polynomiale. On en déduit que f_{n+1} est la primitive nulle en 0 de $x\mapsto 1+x^2Q_n^2(x)$, donc est de la forme $x\mapsto x+x^3R_n(x)$, où R_n est polynomiale :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)=x+\alpha_n x^3+\cdots}$$

c) Donc : $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, f_n'(0)=1, f_n''(0)=0}$

3. $\forall\, n\geq 1, \forall\, x\in[0,\pi/4], f_n'(x)=1+f_{n-1}^2(x)$ et $0\leqslant f_{n-1}(x)\leqslant \tan x\leqslant 1$, donc :

$$\boxed{\forall\, n\geq 1, \forall\, x\in[0,\pi/4], 0\leqslant f_n'(x)\leqslant 2}$$

Le résultat étant banalement vrai pour $n=0$.

Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\forall\, n\geq 1, \forall\, x,y\in[0,\pi/4], |f_n(x)-f_n(y)|\leqslant 2|x-y|$$

et, par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\forall\, x,y\in[0,\pi/4], |f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$$

Ainsi f est 2-lipschitzienne, donc continue.

Exercice 2.

On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer rapidement que (M_1, M_2, M_3, M_4) forme une base de E.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit T l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$: $T(M) = AM - MA$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} T$ et une base de $\operatorname{Im} T$.

3. a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à une base de vecteurs propres de A.

b) Calculer $T(PM_iP^{-1})$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

En déduire que T est diagonalisable.

Solution :

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit d'une faon et d'une seule comme combinaison linéaire des matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 :

$$A = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

Donc (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) T est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour toutes matrices et tout scalaire :

$$\begin{aligned} T(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A = AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= T(M) + \lambda T(N) \end{aligned}$$

$$\boxed{T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}$$

b) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $AM - MA = \begin{pmatrix} 2c & 2d - 2a - b \\ c & -2c \end{pmatrix}$.

$\star$ $M \in \operatorname{Ker}(T) \iff c = 0$ et $b = 2(d - a)$, $\operatorname{Ker}(T)$ est donc l'espace vectoriel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 2(d-a) \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

On peut choisir pour base de $\mathrm{Ker}(T)$, par exemple la famille (I, A).

$\star$ $\mathrm{Im}(T)$ est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2c & \alpha \\ c & -2c \end{pmatrix}$, ce sous-espace est de dimension 2 et on peut choisir comme base de cet espace la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

3. a) La matrice A est trigonale supérieure, ses valeurs propres sont donc en évidence et $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$.

La matrice A est carrée d'ordre deux et admet deux valeurs propres : elle est diagonalisable.

b) Il existe donc une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement P).

$$\begin{aligned} T(PM_iP^{-1}) &= APM_iP^{-1} - PM_iP^{-1}A = PDM_iP^{-1} - PM_iDP^{-1} \\ &= P(DM_i - M_iD)P^{-1}. \end{aligned}$$

Or si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $DM - MD = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{cases} DM_1 - M_1D = 0 \\ DM_2 - M_2D = -M_2 \\ DM_3 - M_3D = M_3 \\ DM_4 - M_4D = 0 \end{cases}, \ i.e. \ \begin{cases} T(PM_1P^{-1}) = 0 \\ T(PM_2P^{-1}) = -PM_2P^{-1} \\ T(PM_3P^{-1}) = PM_3P^{-1} \\ T(PM_4P^{-1}) = 0 \end{cases}$$

Enfin, les quatre matrices $PM_1P^{-1}, PM_2P^{-1}, PM_3P^{-1}, PM_4P^{-1}$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque :

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i PM_iP^{-1} = 0 \iff P\big(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i M_i\big)P^{-1} = 0 \iff \sum_{i=1}^{4} \lambda_i M_i = 0$$

Ce qui impose la nullité des coefficients λ_i.

On vient donc de déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour T et T est diagonalisable.

Exercice 3.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

On pose $D = Y - X$ si $Y > X$ et $D = 0$ sinon.

1. Donner la loi de D.

2. Montrer que D admet une espérance et donner sa valeur en fonction de p.

Solution :

1. D prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et par balayage des cas possibles et indépendance des variables aléatoires X et Y :

$\star\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(D = k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(X = i)P(Y = k + i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}pq^{k+i-1}$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(D = k) = p^2q^k \sum_{i=1}^{\infty} (q^2)^{i-1} = \frac{p^2q^k}{1 - q^2} = \frac{pq^k}{1 + q}$$

$\star$ D'où : $P(D = 0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{pq^k}{1 + q} = 1 - \dfrac{pq}{(1 + q)(1 - q)} = \dfrac{1}{1 + q}$

2. Sous réserve de convergence :

$E(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP(D = k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kP(D = k) = \dfrac{pq}{1 + q} \sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$

On reconnaît une série de référence convergente, donc D a une espérance et :

$$\boxed{E(D) = \frac{pq}{1 + q} \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{q}{p(1 + q)}}$$

Exercice 4.

Soit : $E = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + bc > 0 \right\}$

1. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Dans toute la suite de l'exercice, A est un élément de E.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

3. On considère les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{2k+1}}{(2k + 1)!} \quad \text{et } S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

a) Montrer, en les déterminant, qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et deux suites numériques (a_n) et (b_n) telles que :

$$S_1 = a_nX \quad \text{et } S_2 = b_nY$$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

4. Montrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres (on pourra utiliser l'expression trouvée pour A^2).

Solution :

1. E ne contient pas la matrice nulle, donc n'est pas un espace vectoriel.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, alors $A^2 = (a^2 + bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a^2 + bc)I_2$ et, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{A^{2n} = (a^2 + bc)^nI_2\ ;\ A^{2n+1} = (a^2 + bc)^nA}$$

3. a) D'où : $S_1 = \Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a^2+bc)^k}{(2k+1)!}\Big)A$ et $S_2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a^2+bc)^k}{(2k)!}\Big)I$

Ainsi : $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a^2+bc)^k}{(2k+1)!}$, $X = A$; $b_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a^2+bc)^k}{(2k)!}$, $Y = I$.

b) On sait que pour tout réel x, on a : $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, d'où : $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^k}{k!} = \mathrm{e}^{-x}$ et, par somme et différence :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \ ; \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Posons alors $d = \sqrt{a^2+bc}$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\mathrm{e}^d + \mathrm{e}^{-d}}{2} \ ; \ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\mathrm{e}^d - \mathrm{e}^{-d}}{2d}}$$

4. Comme $A^2 = (a^2+bc)I_2$, si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 = a^2+bc$. Les valeurs propres possibles de A sont donc d et $-d$.

$\star$ On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (a-d)x + by = 0 \\ cx - (a+d)y = 0 \end{cases}$

Comme $(a-d)(-a-d) - bc = -a^2 - bc + d^2 = 0$, les deux équations sont proportionnelles et d est effectivement valeur propre.

$\star$ On montre de la même faon que $-d$ est valeur propre et A est une matrice carrée d'ordre 2 ayant deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

Exercice 5.

On considère p ($p \geq 2$) boîtes $B_1, B_2, \ldots B_p$. On sait que l'une d'entre elles contient un objet O. On ouvre successivement, au hasard, les boîtes jusqu'à **savoir** dans laquelle se trouve O.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes ouvertes.

Déterminer la loi de X ainsi que ses deux premiers moments.

Solution :

Il convient de faire attention aux termes de l'énoncé : on veut savoir où est l'objet et le nombre de boîtes que l'on peut avoir à ouvrir varie de 1 (si l'objet est localisé immédiatement) à $p-1$ (si les $(p-1)$ premières boîtes ouvertes sont vides, on sait où est l'objet !).

Ainsi $X(\Omega) \subset [\![1, p-1]\!]$ et même $X(\Omega) = [\![1, p-1]\!]$, puisque toutes les situations intermédiaires sont possibles.

$\star$ $P(X=1) = \dfrac{1}{p}$ (succès dès la première ouverture).

$\star$ $P(X=2) = \dfrac{p-1}{p} \times \dfrac{1}{p-1} = \dfrac{1}{p}$ (le premier essai est un échec et le deuxième amène le succès).

$\star$ $P(X=3)=\dfrac{p-1}{p}\times\dfrac{p-2}{p-1}\times\dfrac{1}{p-2}=\dfrac{1}{p}$ (deux échecs, puis le succès).

$\star$ Plus généralement $\forall\, k\in[\![1,p-2]\!], P(X=k)=\dfrac{1}{p}\mp$

$\star$ Enfin, $P(X=p-1)=1-\sum\limits_{k=1}^{p-2}P(X=k)=\dfrac{2}{p}\mp$

On en déduit : $E(X)=\sum k.P(X=k)=\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p-2}k+(p-1)\dfrac{2}{p}$

et sachant que $\sum\limits_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}$:

$$\boxed{E(X)=\frac{(p+2)(p-1)}{2p}}$$

Puis $E(X^2)=\sum k^2P(X=k)=\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p-2}k^2+(p-1)^2\dfrac{2}{p}$

et sachant que $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\boxed{E(X^2)=\frac{(p-1)(2p^2+2p-3)}{6p}}$$

La variance s'en déduirait, par la formule de Koenig : $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

Exercice 6.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{(\cos x)^n}{\sin x}dx$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

2. La série de terme général I_n est–elle convergente ?

3. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}, pour $n\in\mathbb{N}$.

4. En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k}\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{2k}$.

Solution :

1. La fonction à intégrer est définie et continue sur le segment d'intégration : il n'y a pas de problème d'existence et $\forall\, x\in\big[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\big], 0\leqslant\cos x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin x\geq\dfrac{1}{2}\mp$

Par conséquent : $0\leqslant\dfrac{(\cos x)^n}{\sin x}\leqslant 2\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)^n$ et :

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{2\pi}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^n$$

Comme $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^n = 0$ et, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0}$$

2. De plus, la série de terme général I_n est convergente, car il s'agit d'une série de terme général positif majoré par le terme général d'une série géométrique convergente.

3. On écrit, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{n+2}}{\sin x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\cos x)^n (1-\sin^2 x)}{\sin x} dx$$

$$= I_n - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^n x \sin x \, dx$$

Cette dernière intégrale se calcule à vue et :

$$\boxed{I_{n+2} = I_n + \Big[\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = I_n - \frac{1}{n+1}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^{n+1}}$$

4. En ne considérant que les indices impairs, on a donc par sommation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n I_{2k+1} = \sum_{k=1}^n I_{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^{2k}$$

et, en simplifiant : $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{2k}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^{2k} = I_1 - I_{2n+1}$

La suite (I_{2n+1}) convergeant vers 0, la série proposée est convergente et :

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^{2k} = I_1$$

Or $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \Big[\ln(\sin x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k}\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^{2k} = \ln 2}$$

Exercice 7.

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes et suivant chacune la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. a) Montrer que S_2 suit la loi de Poisson de paramètre 2λ.

b) Montrer par récurrence que S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $Y_n = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{S_n}$.

a) Montrer que Y_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $]0, 1]$.

b) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

c) En déduire un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\lambda}$. Cet estimateur est-il convergent ?

Solution :

1. a) $X_1 + X_2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on obtient par disjonction des cas et indépendance de X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned} P(S_2 = n) &= P\Big(\bigcup_{k=0}^{n}[(X_1 = k) \cap (X_2 = n-k)]\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) = \mathrm{e}^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\lambda^k\lambda^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{n!}(\lambda+\lambda)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{S_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2\lambda)}$$

b) Supposons que pour un certain rang n, $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$, alors comme X_{n+1} est indépendante de $X_1, \ldots, X_n$, la variable aléatoire X_{n+1} est indépendante de S_n et un calcul du même type que celui que l'on vient de faire montre que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda$. Par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$$

2. a) S_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc Y_n prend les valeurs $\big(1-\frac{1}{n}\big)^k$, $k \in \mathbb{N}$ (et deux valeurs distinctes de k donnent deux valeurs distinctes de $\big(1-\frac{1}{n}\big)^k$). Toutes ces valeurs sont bien strictement positives et inférieures ou égales à 1.

b) $\star$ On a : $P\Big(Y_n = \big(1-\frac{1}{n}\big)^k\Big) = P(S_n = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n\lambda}(\lambda n)^k}{k!}$.

$\star$ Y_n est une variable bornée, donc admet une espérance et :

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(1-\frac{1}{n}\big)^k\,\frac{\mathrm{e}^{-n\lambda}(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda n-\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\mathrm{e}^{n\lambda-\lambda}$$

$$\boxed{E(Y_n) = \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

$\star$ De même, Y_n a un moment d'ordre 2 et :

$$E(Y_n^2) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(1-\frac{1}{n}\big)^{2k}\,\frac{\mathrm{e}^{-n\lambda}(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda n - 2\lambda + \frac{\lambda}{n})^k}{k!}$$

Soit : $E(Y_n^2) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\mathrm{e}^{\lambda n - 2\lambda + \frac{\lambda}{n}} = \mathrm{e}^{-2\lambda+\frac{\lambda}{n}}$ et :

$$\boxed{V(Y_n) = E(Y_n^2) - [E(Y_n)]^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda}(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1)}$$

c) Comme $E(Y_n) = \mathrm{e}^{-\lambda}$, Y_n est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\lambda}$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} V(Y_n) = 0$, cet estimateur est convergent.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par :

$$f_n : x \mapsto -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique x_n dans $]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

b) Montrer que $1 + \ln(1 - x_n) + \displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0.$

En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

Solution :

1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et $f_n'(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} > 0$.
Donc la fonction f_n est continue strictement croissante sur $[0,1]$, avec :

$$f_n(0) = -1 < 0 \text{ et } f_n(1) > 0.$$

Par le théorème de la bijection, on en déduit que f_n s'annule une fois et une seule sur $]0,1[$, en un point que l'on note x_n.

2. a) On a $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \dfrac{x_n^{n+1}}{n+1} = 0 + \dfrac{x_n^{n+1}}{n+1} > 0.$
Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et f_{n+1} est également croissante, donc $x_n > x_{n+1}$:
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente de limite notée ℓ.

b) Pour $t \in [0, x_n]$, on a $t \neq 1$ et l'identité géométrique donne :

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

D'où, en intégrant entre 0 et x_n :

$$1 = x_n + \frac{x_n^n}{2} + \cdots + \frac{x_n^n}{n} = -\ln(1 - x_n) - \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt$$

Soit : $$\boxed{1 + \ln(1 - x_n) = -\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt}$$

Mais :

$$0 \leqslant \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x_n}\int_0^{x_n} t^n\, dt = \frac{1}{1-x_n} \times \frac{x_n^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x_n)}$$

et comme, par décroissance de la suite (x_n), $0 \leqslant \ell < 1$, on obtient par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{x_n} \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0$$

Soit $1 + \ln(1 - \ell) = 0$, *i.e.* $\ell = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1 - \mathrm{e}^{-1}}$$

Exercice 9.

Une machine à sous fonctionne de la faon suivante : lorsque l'on joue 1 euro, elle rend

- 3 euros avec la probabilité a ;
- 2 euros avec la probabilité b ;
- 0 euros avec la probabilité c.

Avec $a + b + c = 1$.
Un joueur possède N euros et décide de jouer n fois.
On pose $X_0 = N$ et pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i est la variable aléatoire qui représente la fortune du joueur à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ partie.

1. Déterminer la loi de X_1 et la valeur de $E(X_1)$.

2. Déterminer la loi de X_2 et la valeur de $E(X_2)$.

3. Déterminer, plus généralement, la valeur de $E(X_k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Solution :

1.

X_1	$N-1$	$N+1$	$N+2$
$P(X_1 = k)$	c	b	a

et $E(X_1) = N + 2a + b - c$

2. En listant tous les cas possibles :

$X_2 - N$	-2	0	1	2	3	4
$P(X_2 = N + k)$	c^2	$2bc$	$2ac$	b^2	$2ab$	a^2

et $E(X_2) = N - 2c^2 + 2ac + 2b^2 + 6ab + 4a^2 = N + 2(a+b+c)(2a+b-c)$
et puisque $a + b + c = 1$:

$$E(X_2) = N + 2(2a + b - c)$$

3. Plus généralement, soit G_i le gain de la i^{me} partie. Pour tout i, G_i a même loi que $X_1 - N$ et $E(G_i) = 2a + b - c$.
Comme $X_k = N + G_1 + \cdots + G_k$, il vient :

$$\boxed{E(X_k) = N + k(2a + b - c)}$$

Exercice 10.

On considère la suite définie par son premier terme u_0 strictement positif et la relation de récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$.

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bien définie.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser la valeur de sa limite.

3. a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n strictement positif, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

b) Montrer que pour tout entier k on a : $\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = 1 + u_k$.

c) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k).$$

d) Quelle est la limite lorsque n tend vers l'infini de $\dfrac{\ln(n)}{n}$?

e) En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de $n.u_n$.

Solution :

1. Puisque $u_0 > 0$, u_1 est bien défini et $u_1 > 0$. Une récurrence élémentaire montre que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs strictements positives.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_n^2 + u_n + 1} < 1$, la suite étant à termes positifs, on en déduit sa décroissance.

Décroissante et minorée par 0, (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2 + \ell + 1}$, d'où $\ell = 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

3. a) $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0^2 + u_0 + 1} < \dfrac{u_0}{u_0} = 1$ et si pour un certain rang n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, alors :

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n.u_n - u_n^2 - 1}{(n+1)(u_n^2 + u_n + 1)} \leqslant \frac{n.u_n - 1}{(n+1)(u_n^2 + u_n + 1)} \leqslant 0$$

Ainsi la propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, on conclut par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{n}}$$

b) $\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{u_k^2 + u_k + 1}{u_k} - \dfrac{1}{u_k} = u_k + 1$.

c) Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$, ou par l'inégalité des accroissements finis :

$$\ln(k+1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

d) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

e) Par itération du résultat b), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = n + u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

Or : $0 < u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant \ln n$ (résultat c))

Par conséquent $\frac{1}{u_0} + u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ est négligeable devant n (résultat d)) et $\frac{1}{u_n}$ est équivalent à n, *i.e.* :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n.u_n = 1}$$

Exercice 11.

On considère une entreprise de 400 salariés. La moyenne et l'écart-type du salaire mensuel de tout le personnel sont respectivement $\overline{x} = 10000$ F et $\sigma(x) = 2000$ F. Le salaire le plus bas est 6000 F et le salaire le plus élevé est 30000 F.

À la suite d'une grève, des négociations salariales s'ouvrent. À l'issue de celles-ci, le salaire de chaque salarié sera majoré en appliquant la formule générale suivante : $y_i = ax_i + b$, où :

- le nombre x_i représente le salaire du salarié i avant l'augmentation,
- le nombre y_i représente le salaire du salarié i après l'augmentation,
- les coefficients a et b sont à déterminer.

Trois propositions sont sur la table des négociations :

P_1 : augmenter la masse salariale de 5% tout en laissant inchangée la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type.

P_2 : augmenter la masse salariale de 5% tout en laissant inchangée la dispersion relative des salaires mesurée par le coefficient de variation $CV = \dfrac{\text{ecart}-\text{type}}{\text{moyenne}}$.

P_3 : réduire de 2% la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type tout en augmentant la masse salariale d'un montant tel qu'aucun salaire ne diminue.

1. Calculer la masse salariale et le coefficient de variation des salaires avant l'augmentation.

2. Pour chacune des trois propositions en présence :

a) Calculer les paramètres a et b à utiliser. (Pour P_3 on prendra la plus petite valeur de b vérifiant toutes les conditions).

b) Calculer la moyenne du nouveau salaire mensuel.

3. Autour de la table de négociations, on trouve trois groupes : des représentants de la direction, des représentants des cadres et des représentants des salariés non cadres, chaque groupe ayant formulé une des trois propositions.

a) Calculer, en pourcentage, l'augmentation de la masse salariale correspondant à la proposition P_3.

b) Donner l'allure de la représentation graphique, dans un même repère, du nouveau salaire y en fonction de l'ancien x pour chacune des propositions. On s'intéressera uniquement à la position relative de ces droites.

c) Identifier, en utilisant les résultats précédents, de quel groupe émane chacune des propositions.

Solution :

1. La masse salariale est $\sum x_i = n.\overline{x} = 4\,000\,000$ et $CV = \dfrac{\sigma(x)}{\overline{x}} = 0{,}2$.

2. a) $y_i = ax_i + b$ donne $\overline{y} = a\overline{x} + b$ et $\sigma(y) = a\sigma(x)$ $(a > 0)$.

$\star$ Pour P_1, $\sigma(x) = \sigma(y)$ et $\overline{y} = 1{,}05.\overline{x}$, soit $a = 1$ et $b = 500$:

$$\boxed{y_i = x_i + 500}$$

$\star$ Pour P_2, $\dfrac{\sigma(x)}{\overline{x}} = \dfrac{\sigma(y)}{\overline{y}} \iff \dfrac{\sigma(x)}{\overline{x}} = \dfrac{a\sigma(x)}{a\overline{x} + b} \iff b = 0$ et

$\dfrac{\sum y_i}{\sum x_i} = 1{,}05 \iff a = 1{,}05$:

$$\boxed{y_i = 1{,}05.x_i}$$

$\star$ Pour P_3, $\sigma(y) = 0{,}98\sigma(x) \iff a = 0{,}98$ et

$\forall\, i, 0{,}98x_i + b \geq x_i \iff b \geq 0{,}02.x_{\max}$

La plus petite valeur de b qui convient est donc $b = 600$ et :

$$\boxed{y_i = 0{,}98.x_i + 600}$$

b) On obtient :

Pour P_1 : $\overline{y} = \overline{x} + 500 = 10\,500$

Pour P_2 : $\overline{y} = 1{,}05.\overline{x} = 10\,500$

Pour P_3 : $\overline{y} = 0{,}98.\overline{x} + 600 = 10\,400$

3. a) Pour P_3 : $\dfrac{\sum y_i}{\sum x_i} = 1{,}04 \iff$ l'augmentation de la masse salariale est de 4%.

b) La construction des trois droites est sans problème et on remarque que :

$\star$ D_2 et D_3 se croisent au point de coordonnées $(8571{,}43; 9000)$, D_2 étant au-dessus de D_3 pour $x > 8571{,}43$.

$\star$ D_2 et D_1 se croisent au point de coordonnées $(10000; 10500)$, D_2 étant au-dessus de D_1 pour $x > 10000$.

c) La proposition P_3 minimise l'augmentation salariale, donc a sûrement été proposée par la direction.

Entre P_1 et P_2, les bas salaires sont favorisés par P_1 et les hauts salaires par P_2 ...