

OPTION B/L

Exercice 4-1

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Calculer u_0, u_1 , puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + u_{n-1}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a + b.e^{-x} + c.e^{-2x}$, a, b, c étant trois paramètres réels quelconques.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et préciser une base de E .

4. a) A toute fonction g de E , on associe la fonction $g_1 = \varphi(g)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = \int_0^1 \frac{g(t+x)}{1 + e^{-t}} dt$$

Montrer que l'application φ ainsi définie est un endomorphisme de E .

Solution :

$$1. u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln \frac{e+1}{2}$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) dx = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$$

Pour $n \geq 1$, $u_n + u_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} - e^{-(n-1)x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x} dx = \frac{1 - e^{1-n}}{n-1}$

2. On a, pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$, donc $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$.

Ainsi : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \leq \frac{1}{n}$ et, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

3. Par définition E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $e_1 : x \mapsto x$, $e_2 : x \mapsto e^{-x}$ et $e_3 : x \mapsto e^{-2x}$.

Vérifions que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, a + b.e^{-x} + c.e^{-2x} = 0$.

★ La considération de la limite en $+\infty$ montre que $a = 0$;

★ il reste donc $\forall x \in \mathbb{R}, b.e^{-x} + c.e^{-2x} = 0$. On peut simplifier par e^{-x} et la considération de la limite en $+\infty$ donne alors $b = 0$;

★ il reste $\forall x \in \mathbb{R}, c.e^{-2x} = 0$, d'où $c = 0$.

La famille est bien libre et est donc une base de E .

4. a) Notons $g = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) &= \int_0^1 \frac{\alpha + \beta.e^{-(t+x)} + \gamma.e^{-2(t+x)}}{1 + e^{-t}} dt \\ &= \alpha \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-t}} dt + \beta.e^{-x} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt + \gamma.e^{-2x} \int_0^1 \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-t}} dt \\ &= \alpha u_0 + \beta u_1.e^{-x} + \gamma u_2.e^{-2x} \end{aligned}$$

Par conséquent : $g_1 = \alpha u_0 e_1 + \beta u_1 e_2 + \gamma u_2 e_3 \in E$

De plus l'écriture précédente montre que φ est linéaire (ce qui peut se voir également par linéarité de l'intégration), sa matrice relativement à la base (e_1, e_2, e_3) étant :

$$M = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4-2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+1} .

3. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. $I_0 = \int_0^1 dx = 1.$

Pour calculer I_1 , effectuons une intégration par parties, en intégrant $x \mapsto 1$ en $x \mapsto 1+x$:

$$I_1 = \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a : $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$ (et $\ln 2 < 1$) et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \int_0^1 (\ln 2)^n dx = (\ln 2)^n$$

et, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 1 \cdot [\ln(1+x)]^{n+1} dx \\ &= [(1+x)[\ln(1+x)]^{n+1}]_0^1 - (n+1) \int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx \end{aligned}$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$

Affinons alors la majoration obtenue en 1. Pour ε strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{1-\varepsilon} [\ln(1+x)]^{n+1} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 [\ln(1+x)]^{n+1} dx \\ &\leq (1-\varepsilon)[\ln(2-\varepsilon)]^{n+1} + \varepsilon(\ln 2)^{n+1} \leq [\ln(2-\varepsilon)]^{n+1} + \varepsilon(\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} \leq \varepsilon + \left(\frac{\ln(2-\varepsilon)}{\ln 2} \right)^{n+1}$$

Le majorant a pour limite ε lorsque n tend vers l'infini, donc pour n assez grand $\frac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} < 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} = 0.$

Or on avait obtenu $(n+1)I_n = 2(\ln 2)^{n+1} - I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} \left(1 - \frac{I_{n+1}}{2(\ln 2)^{n+1}} \right)$

et on peut donc écrire :

$$(n+1)I_n \underset{(\infty)}{\sim} 2(\ln 2)^{n+1}, \text{ i.e. } I_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$$

Exercice 4-3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice A . La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Par la méthode du pivot :

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $A - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si $(-1)(\lambda-1) - (2\lambda-\lambda^2)(1-\lambda) = 0$, ce qui donne, en factorisant $(1-\lambda)^3 = 0$.

La seule valeur propre de A est donc 1.

Si A était diagonalisable elle serait semblable à I , donc serait égale à I , ce qui est manifestement faux. Bref, A n'est pas diagonalisable.

Enfin, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y = x \\ x+y+z = y \\ -y+z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite engendrée

par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. On cherche donc une base (e_1, e_2, e_3) telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$, où f désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A . Nous allons procéder matriciellement :

★ La question précédente montre que l'on peut prendre $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

★ On cherche $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e_2$, soit :

$$\begin{cases} x+y = 1+x \\ x+y+z = y \\ -y+z = -1+z \end{cases}, \text{ ou encore } \begin{cases} y = 1 \\ z+x = 0 \end{cases}. \text{ On peut prendre } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

★ On cherche $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Ae_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_3$, soit :

$$\begin{cases} x + y = x \\ x + y + z = 1 + y, \text{ ou encore } \begin{cases} y = 0 \\ z + x = 1 \end{cases} \\ -y + z = z \end{cases} \cdot \text{ On peut prendre } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui est évident par échelonnement.

Exercice 4-4

Soit X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 .

1. Montrer que la covariance du couple (X, Y) est comprise entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.
2. On suppose que la covariance du couple (X, Y) est nulle. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Notons ρ le coefficient de corrélation entre X et Y . On sait que $\rho^2 \leq 1$, ce qui s'écrit :

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leq V(X)V(Y)$$

Or : $V(X) = p_1(1 - p_1) = p_1 - p_1^2 = -(p_1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, donc $V(X) \leq \frac{1}{4}$ (avec égalité seulement pour $p_1 = \frac{1}{2}$).

On a de même $V(Y) \leq \frac{1}{4}$ et donc $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{4}$.

2. On a $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Mais X, Y et XY sont des variables de Bernoulli, leur espérance est donc la probabilité qu'elles prennent la valeur 1.

Ainsi l'hypothèse devient :

$$P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = P(XY = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

Ce qui signifie que les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants.

D'autre part, on sait que si A et B sont indépendants, il en est de même de $\overline{A}$ et B , ainsi que de A et $\overline{B}$ et également de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Donc, pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, les événements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, ce qui signifie que X et Y sont indépendantes.

Exercice 4-5

On note S le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles.

K est le sous-espace vectoriel des suites constantes, et parmi elles, c est la suite constante dont le terme général est égal à 1.

T est l'application qui, à la suite u de terme général u_n , associe la suite $T(u) = v$, de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

E est le sous-ensemble de S constitué des suites u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S et que $T(E)$ est inclus dans E .

2. Montrer que T est un endomorphisme de S et que, pour toute suite v de S , il existe une et une seule suite u de S telle que $v = T(u)$ et $u_0 = \alpha$, où α est un réel fixé quelconque.

Calculer alors u_n en fonction de α, n , et de termes de la suite v .

On note a la suite de S telle que $T(a) = c$ et $a_0 = 0$.

Vérifier que les suites c et a appartiennent à E .

3. Soit L l'application de E dans $\mathbb{R}^3$, qui à toute suite u de E , associe le triplet (u_0, u_1, u_2) .

Montrer que L est une application linéaire. Est-elle bijective? Quelle est la dimension de E ?

4. Soit u un élément de E . On pose $v = T(u)$, et $w = T(v)$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer w_n en fonction des termes de la suite u .

Montrer que w est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n et de w_0 .

b) Exprimer le terme général v_n de la suite v en fonction de v_0, w_0 et n .

c) Exprimer de même pour $n \geq 0$, le terme général u_n de la suite u en fonction de u_0, v_0, w_0 et n , puis en fonction de u_0, u_1, u_2 et n .

d) Expliciter une base de E .

Solution :

1. • E contient la suite nulle, donc n'est pas vide et les propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ montrent que si u et v sont deux suites vérifiant la relation de récurrence définissant E , alors, pour tout scalaire λ , la suite $u + \lambda v$ vérifie encore cette relation. Donc E est stable par combinaison linéaire et est un sous-espace vectoriel de S .

• Si la suite $u : n \mapsto u_n$ appartient à E , alors un simple décalage de l'indice montre que la suite $u_d : n \mapsto u_{n+1}$ appartient aussi à E , donc $v = T(u) = u_d - u$ appartient aussi à E .

2. La linéarité de $d : u \mapsto u_d$ est évidente et donc $T = d - Id$ est un endomorphisme de S .

Supposons qu'il existe une suite u de S telle que $T(u) = v$. Alors :

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = v_0 \\ u_2 - u_1 = v_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} - u_n = v_n \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = u_0 + v_0 \\ u_2 = u_1 + v_1 = u_0 + v_0 + v_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = u_n + v_n = u_0 + v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ \vdots \end{cases}$$

La connaissance de u_0 détermine donc parfaitement la suite u et, par construction même on a bien $T(u) = v$.

On a donc $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

Il est évident que $c \in E$.

La suite a étant définie par $a_0 = 0$ et $T(a) = c$, ce qui précède montre que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n$. Il est alors facile de vérifier que $a \in E$.

3. La linéarité de L est banale et la relation de récurrence définissant E montre (par récurrence!) qu'une suite de E est parfaitement définie par ses trois premiers termes, ce qui signifie exactement que L est bijective. Ainsi L est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$ et E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}, w_n = v_{n+1} - v_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}$, soit :

$$4.w_{n+1} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n - 8u_{n+2} + 4u_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = w_n$$

Ainsi la suite w est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \frac{1}{4^n}$.

b) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k = v_0 + w_0 \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$, soit :

$$v_n = v_0 + \frac{4w_0}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

et la formule est valable pour $n = 0$.

c) De la même façon : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$, soit :

$$u_n = u_0 + n\left(v_0 + \frac{4w_0}{3}\right) - \frac{4w_0}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Ou encore : $u_n = u_0 + n\left(v_0 + \frac{4w_0}{3}\right) - \frac{16.w_0}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

La formule étant encore valable pour $n = 0$.

Il n'y a plus qu'à remplacer v_0 par $u_1 - u_0$ et w_0 par $u_2 - 2u_1 + u_0$, pour obtenir une expression de la forme :

$$u_n = \alpha + \beta n + \gamma \frac{1}{4^n}$$

où α, β, γ s'expriment en fonction de u_0, u_1, u_2 .

d) Ce qui précède montre que les suites $n \mapsto 1$, $n \mapsto n$ et $n \mapsto \frac{1}{4^n}$ forment une famille génératrice de E . Comme E est de dimension 3, ces trois suites forment une base de E .

Exercice 4-6

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction f_k définie par :

$$f_k(x) = x^k \cdot e^{|\ln(x^2)|}$$

1. a) Déterminer le domaine de définition de f_k .
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_k .
2. Soit X une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 2]$.
a) Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire $Y = e^{|\ln(X^2)|}$
b) Déterminer pour quelles valeurs du réel α , Y^α admet une espérance.

Solution :

1. a) f_k est définie sur $\mathbb{R}^*$ et clairement paire pour k pair, impaire pour k impair. Il suffit donc de faire l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Remarquons que pour $x > 0$,

$$|\ln(x^2)| = 2|\ln x| = \begin{cases} 2 \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -2 \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall x \geq 1, f_k(x) = x^{k+2}$ et $\forall x \in]0, 1], f_k(x) = x^{k-2}$.

On note que les formules se « recollent » pour $x = 1$ et f_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par symétrie, sur $\mathbb{R}^*$. De plus f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$.

En revanche, la dérivée à gauche en 1 de f_k vaut $k-2$, tandis que sa dérivée à droite en 1 vaut $k+2$. Ainsi f_k n'est pas dérivable en 1 (ni en -1).

(on pourrait étudier également le problème du prolongement par continuité en 1 et en -1 ...)

2. a) Puisque X prend ses valeurs entre -2 et 2 , la variable aléatoire $\ln(X^2)$ prend ses valeurs entre $-\infty$ et $\ln 4$, donc $|\ln(X^2)|$ prend ses valeurs entre 0 et $+\infty$, ce qui signifie que $Y(\Omega) = [1, +\infty[$.

$\forall y \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|\ln(X^2)| \leq \ln y) = P(-\ln y \leq \ln(X^2) \leq \ln y) \\ &= P\left[\exp\left(-\frac{1}{2} \ln y\right) \leq |X| \leq \exp\left(\frac{1}{2} \ln y\right)\right] = P\left(\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq \sqrt{y}\right). \end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

★ Pour $y \geq 4$, on a $F_Y(y) = P\left[\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq 2\right] = 2 \cdot \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

★ Pour $1 \leq y \leq 4$, $F_Y(y) = P\left[\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq \sqrt{y}\right] = \frac{1}{2} \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

Par dérivation, on obtient donc pour densité de Y :

$$\text{Si } y \geq 4, f_Y(y) = \frac{1}{4y\sqrt{y}}; \text{ si } 1 \leq y < 4, f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} + \frac{1}{4y\sqrt{y}}$$

b) Sous réserve de convergence, et par le théorème de transfert :

$$E(Y^\alpha) = \int_1^{+\infty} y^\alpha f_Y(y) dy$$

Le seul problème est dû à la présence de la borne infinie et $y^\alpha f_Y(y) \underset{(+\infty)}{\sim}$

$$\frac{1}{4} y^{\alpha-\frac{3}{2}}.$$

La règle de Riemann montre alors que Y^α admet une espérance si et seulement si α vérifie : $\alpha - \frac{3}{2} < -1$, *i.e.* si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. En particulier Y n'a pas d'espérance.

Exercice 4-7

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux ; f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X+1)P(X+1) - (X-1)P(X-1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = 2; \forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{6}((n+1)u_{n+1} - (n-1)u_{n-1})$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E$ vérifiant : $\forall n \geq 1, u_n = P(n)$.

En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

1. La linéarité de f résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et il suffit de vérifier que l'image par f des polynômes de la base canonique de E sont encore éléments de E :

$$f(1) = (X+1) - (X-1) = 2;$$

$$f(X) = (X+1)(X+1) - (X-1)(X-1) = 4X;$$

$$f(X^2) = (X+1)(X+1)^2 - (X-1)(X-1)^2 = 6X^2 + 2.$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de E .

2. La matrice de f relativement à la base canonique de E est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Cette matrice est trigonale supérieure, donc les valeurs de A (donc de f) se lisent sur sa diagonale :

$$\text{Spec } A = \text{Spec } f = \{2, 4, 6\}$$

f a donc 3 valeurs propres et comme $\dim E = 3$, on en déduit que f est diagonalisable et en résolvant les systèmes correspondants, on trouve :

$$E_{(2)}(f) = \text{Vect}(2) ; E_{(4)}(f) = \text{Vect}(X) ; E_{(6)}(f) = \text{Vect}(2X^2 + 1)$$

3. $P \in E$ convient si et seulement si $P(1) = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P(n+1) - (n-1)P(n-1) - 6P(n) = 0$$

Or le seul polynôme qui s'annule en tout point de l'ensemble infini $\mathbb{N}^*$ est le polynôme nul.

On doit donc chercher un polynôme $P \in E$ tel que $P(1) = 2$ et $f(P) = 6P$.

La question précédente montre que la solution est le polynôme $\frac{2}{3}(2X^2 + 1)$.

On a donc : $\forall n \geq 1, u_n = \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}$.

Exercice 4-8

Soit b un nombre réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ , avec $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$. Déterminer a pour que la probabilité de l'événement $(a < X \leq a + b)$ soit maximale.

Solution :

On a : $(a < X \leq a + b) = \left(\frac{a-m}{\sigma} < \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a+b-m}{\sigma} \right)$. Donc

$$f(a) = P(a < X \leq a + b) = \Phi\left(\frac{a+b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation d'une fonction composée :

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = \frac{1}{\sigma} \Phi'\left(\frac{a+b-m}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \Phi'\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ et donc $f'(a)$ est du signe de :

$$g(a) = \exp\left(-\frac{(a+b-m)^2}{\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

La fonction $\exp$ étant strictement croissante, $g(a)$ a même signe que :

$$-\frac{(a+b-m)^2}{\sigma^2} + \frac{(a-m)^2}{\sigma^2}$$

donc a même signe que : $-(a+b-m)^2 + (a-m)^2 = -b(b+2a-2m)$

Comme $b > 0$, $f'(a)$ est positif pour $a \leq \frac{2m-b}{2}$ et négatif pour $a \geq \frac{2m-b}{2}$.

Ainsi f passe par un maximum absolu strict pour $a = \frac{2m-b}{2} = m - \frac{b}{2}$.

Le maximum valant d'ailleurs $2\Phi\left(\frac{b}{2\sigma}\right) - 1$

(Noter que le résultat semble clair sur un dessin représentant une densité d'une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, en interprétant la probabilité de l'énoncé en termes d'aires.)