

OPTION B/L

Exercice BL-1

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
 b) Montrer que la suite de terme général $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est convergente.
 2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 \leq s_n$.
 b) Montrer que la suite de terme général $s_n - 2\sqrt{n}$ est convergente.
-

Solution :

1. a) L'inégalité est banale pour $n = 1$ et si on la suppose vraie pour un certain rang n , alors :

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Or : } \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} \text{ et donc :}$$

$$s_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

On conclut par le principe de récurrence.

- b) La question précédente montre que $\frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq 2$ et, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{s_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{s_n}{\sqrt{n}} &= s_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\ &\geq (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

La suite de terme général $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est donc croissante et majorée, donc convergente (on peut aussi comparer classiquement s_n avec une intégrale).

2. a) A nouveau l'inégalité est banale pour $n = 1$ et si on la suppose vraie pour un certain rang n , alors :

$$s_{n+1} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} - 2$$

$$\text{Car } 2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

A nouveau, on conclut par le principe de récurrence.

b) La question précédente montre que $s_n - 2\sqrt{n} \geq -2$ et de plus :

$$s_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - s_n + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

On vérifie aisément que le numérateur est négatif, donc la suite $(s_n - 2\sqrt{n})$ est décroissante et minorée, et par conséquent est convergente.

Notons que cette question permet de retrouver le résultat de la question 1)

b) et montre en prime que la limite de la suite $\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$ vaut 2.

Exercice BL-2

Pour α et β réels positifs ou nuls, on pose : $f(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt$.

1. Vérifier que $f(\alpha, \beta) = f(\alpha+1, \beta) + f(\alpha, \beta+1)$.

2. Montrer que $(\alpha+1)f(\alpha, \beta+1) = (\beta+1)f(\alpha+1, \beta)$. En déduire une relation entre $f(\alpha+1, \beta)$ et $f(\alpha, \beta)$.

3. Montrer que $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.

4. Calculer $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \alpha \geq \frac{1}{2}, \forall \beta \geq \frac{1}{2}$:

$$\lambda^2 f\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}\right) + 2\lambda f(\alpha, \beta) + f\left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

puis : $[f(\alpha, \beta)]^2 \leq f\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}\right) \times f\left(\alpha - \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right)$.

Solution :

1. Notons que pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ l'intégrale définissant $f(\alpha, \beta)$ a bien un sens, la fonction à intégrer étant continue.

Par linéarité de l'intégration :

$$f(\alpha + 1, \beta) + f(\alpha, \beta + 1) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta [t + (1-t)] dt = f(\alpha, \beta)$$

2. Dans l'intégrale définissant $f(\alpha, \beta + 1)$, procédons à une intégration par parties (légitime) :

$$f(\alpha, \beta + 1) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\beta+1} dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} (1-t)^{\beta+1} \right]_0^1 - \frac{\beta+1}{\alpha+1} \int_0^1 t^{\alpha+1} (1-t)^\beta dt$$

Soit :

$$(\alpha + 1)f(\alpha, \beta + 1) = (\beta + 1)f(\alpha + 1, \beta)$$

3. Le changement de variable $u = 1 - t$, de classe $\mathcal{C}^1$ donne :

$$f(\alpha, \beta) = \int_1^0 (1-u)^\alpha u^\beta (-du) = f(\beta, \alpha)$$

4. $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$ (sans calculs, car on reconnaît l'aire d'un demi-disque de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$: pour cela il suffit d'écrire :

$$y \leq \sqrt{x(1-x)} \iff y \geq 0 \text{ et } y^2 + x^2 - x \leq 0$$

5. Soit $T_{\alpha, \beta}(\lambda)$ l'expression de l'énoncé. En plaçant tout sous la même intégrale, il vient :

$$T_{\alpha, \beta}(\lambda) = \int_0^1 t^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-t)^{\beta-\frac{1}{2}} (\lambda\sqrt{t} + \sqrt{1-t})^2 dt \geq 0$$

Ce trinôme du second degré est donc toujours positif ou nul, ce qui entraîne que son discriminant (réduit) est négatif ou nul, ce qui est exactement l'inégalité de l'énoncé.

Exercice BL-3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \exp(\frac{1}{\ln x})$

(exp désigne la fonction exponentielle de base e, i.e. $\exp(u) = e^u$)

1. Etudier les variations de la fonction f . Préciser le comportement aux bornes de son domaine de définition D et donner une représentation graphique de f .

2. Montrer que $f \circ f$ est bien définie sur D et expliciter cette fonction.

3. Soit u la suite réelle définie par son premier terme $u_0 = x$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Pour quelles valeurs de x la suite u est-elle bien définie ?
 - b) Etudier alors le comportement de cette suite.
-

Solution :

1. La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, dérivable sur son domaine de définition, avec $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} f(x) < 0$, donc f décroît sur ses intervalles de continuité $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Les limites s'obtiennent sans problème : $\lim_{0^+} f = 1$, $\lim_{1^-} f = 0$, $\lim_{1^+} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. D'où l'esquisse d'une représentation graphique :

2. On remarque que $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\implies f(x) \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donc $f \circ f$ est bien définie, avec :

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \exp\left(\frac{1}{\ln(\exp(\frac{1}{\ln x}))}\right) = \exp(\ln x) = x$$

(ce que le dessin précédent laissait supposer).

3. a) Pour définir u_1 , il faut que $x \in D_f$ et, comme D_f est stable par f , la suite est alors bien définie.

b) Comme $f \circ f = id_{D_f}$, on a $u_2 = u_0 = f(x)$, $u_3 = u_1 = f(x)$ et plus généralement, pour tout k : $u_{2k} = x$, $u_{2k+1} = f(x)$. Ces deux suites extraites sont donc convergentes et la suite (u_n) est convergente si et seulement si $u_1 = u_0$, i.e. $x = f(x)$. Or :

$$x = f(x) \iff \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right) = x \iff (\ln x)^2 = 1 \iff x \in \{e, e^{-1}\}$$

(les nombres trouvés appartiennent bien au domaine D_f)

Exercice BL-4

Soit f définie par : $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
4. Etudier les branches infinies de la représentation graphique de f et esquisser cette représentation.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur tout segment ne contenant pas 0. Comme x et $3x$ sont de même signe, le domaine de définition D_f de f est *a priori* $\mathbb{R}^*$.

2. Soit φ une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a : $f(x) = \varphi(3x) - \varphi(x)$, d'où $f'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x)$, soit :

$$f'(x) = \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{x} = e^{-x} \times \frac{e^{-2x} - 1}{x}$$

3. ★ Supposons $x > 0$ et notons m_x et M_x la borne supérieure et la borne inférieure de $t \mapsto e^{-t}$ sur le segment $[x, 3x]$. On a : $\forall t \in [x, 3x], \frac{m_x}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{M_x}{t}$, d'où $m_x \ln 3 \leq f(x) \leq M_x \ln 3$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0} \exp = 1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \ln 3$.

★ Le cas $x < 0$ se traite de même et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \ln 3$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 3$.

★ Les équivalents classiques montrent que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -2$. La fonction f , prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0, et f' admet une limite en 0. On sait alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = -2$.

4. ★ Pour $t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, donc pour $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \int_x^{3x} e^{-t} dt = e^{-x} - e^{-3x}$. On en déduit, par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

★ Pour $x < 0$, posons $t = -u$ et $y = -x$: $f(x) = \int_y^{3y} \frac{e^u}{u} du$.

Il existe $A > 0$ tel que $u > A \implies e^u > u^3$ (prépondérance classique), donc pour $x < -A$: $f(x) \geq \int_y^{3y} u^2 du = \frac{26}{3}y^3 = \frac{26}{3}|x|^3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: la courbe représentative présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées. La représentation graphique s'en déduit.

Exercice BL-5

Une entreprise fabrique des bacs parallélépipédiques de largeur x , de longueur y et de hauteur z . Ces bacs comportent un fond mais pas de couvercle et l'épaisseur des plaques formant ces bacs est négligeable.

1. Quelle est l'aire totale des plaques nécessaires à la construction d'un bac ? On notera cette aire $A(x, y, z)$.
 2. On suppose que le volume V d'un tel bac est imposé. Comment choisir les dimensions pour minimiser l'aire A ?
-

Solution :

1. On a $A(x, y, z) = xy + 2(xz + yz)$ (un fond et quatre faces deux à deux égales).
2. Il s'agit de trouver le *minimum* de A sous la contrainte $V = xyz$, où V est donné. Cela revient à trouver le *minimum* de la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto xy + 2(x + y)\frac{V}{xy}$, les variables x et y décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

Or :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 2Vy}{x^2 y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 2Vx}{xy^2} \end{cases}$$

La recherche des points critiques donne la relation évidente $x = y$, d'où l'unique point critique de coordonnées :

$$x_0 = (2V)^{1/3} \text{ et } y_0 = (2V)^{1/3}$$

On peut alors calculer les dérivées partielles secondes en ce point pour voir qu'il s'agit bien d'un *minimum*.

Exercice BL-6

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et g un endomorphisme de E tel que $g \circ g \circ g = 0$ (où 0 désigne l'endomorphisme nul de E).

1. Peut-on avoir $\dim \operatorname{Ker} g = 0$?

2. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ est inclus dans $\operatorname{Im} g$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(g \circ g)$? Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E

telle que la matrice de g relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de g relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 0$, alors g est injectif, donc est un automorphisme de E et g^3 également, ce qui contredit l'hypothèse $g^3 = 0$.

2. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ et si $\operatorname{Ker} g$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} g$, alors $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. La restriction de g à son image est donc injective et réalise un isomorphisme de $\operatorname{Im} g$ sur lui-même. Ainsi la restriction de g^3 à $\operatorname{Im} g$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} g$ sur $\operatorname{Im} g \setminus \{0\}$ ce qui contredit l'hypothèse $g^3 = 0$.

Le théorème du rang, appliqué à la restriction de g à $\operatorname{Im} g$ donne :

$$2 = \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} g}) + \dim \operatorname{Im} g^2$$

Or $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} g}) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g$, donc $\dim \operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} g}) = \dim \operatorname{Ker} g = 1$, ce qui donne $\dim \operatorname{Im} g^2 = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} g^2 = 2$.

Soit x un vecteur n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} g^2$, on voit facilement que la famille $(g^2(x), g(x), x)$ est une base de E et relativement à cette base, g se traduit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, alors $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g$ (sinon $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et on conclut comme précédemment), donc en fait $g^2 = 0$ et en choisissant un vecteur x qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker} g$, le vecteur $g(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} g$, on peut donc construire une base de $\operatorname{Ker} g$ de la forme $(g(x), y)$. La famille $(g(x), y, x)$ est une base de E et relativement à cette base, g se traduit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice BL-7

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2, 3 indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'un jeton de cette urne, en replaant à chaque fois le jeton obtenu, avant le tirage suivant.

1. On note Y le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, deux numéros différents. Déterminer la loi de Y et son espérance.

2. On note Z le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

- Déterminer la loi du couple (Z, Y) .
 - Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.
-

Solution :

1. ★ La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et pour $k \geq 2$, l'événement $(Y = k)$ est réalisé si les tirages du rang 2 au rang $k - 1$ (s'il en existe) amènent le même résultat que le premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité $(1/3)^{k-2}$), le k -ème tirage amenant un résultat différent (ce qui se produit avec la probabilité $2/3$, soit :

$$\forall k \geq 2, P(Y = k) = (1/3)^{k-2}(2/3)$$

★ La convergence étant évidente, on a :

$$E(Y) = 2 \sum_{k=2}^{\infty} k(1/3)^{k-1} = 2 \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

2. a) L'événement $(Z = m) \cap (Y = k)$ ne peut se réaliser que si l'on a : $m \geq 3$ et $2 \leq k < m$ et alors :

$$P[(Z = m) \cap (Y = k)] = P(Y = k)P(Z = m | Y = k).$$

$$\text{Or : } P(Y = k) = \frac{2}{3^{k-1}} \text{ et } P(Z = m | Y = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-k-1} \frac{1}{3}$$

car les tirages dont les rangs sont compris entre $k + 1$ et $m - 1$ (s'il en existe) amènent l'un quelconque des deux numéros déjà obtenus, le dernier tirage permettant de conclure. Soit :

$$P[(Z = m) \cap (Y = k)] = \frac{2^{m-k}}{3^{m-1}}$$

b) ★ Ainsi, pour $m \geq 3$: $P(Z = m) = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{2^{m-k}}{3^{m-1}} = \frac{1}{3^{m-1}}(2^{m-1} - 2).$

★ La convergence de la série étant à nouveau classique, on a :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{m=3}^{\infty} \frac{m}{3^{m-1}}(2^{m-1} - 2) \\ &= \sum_{m=3}^{\infty} m\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} - 2 \sum_{m=3}^{\infty} m\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

Aux premiers termes près, on reconnaît des séries classiques et :

$$E(Z) = \frac{11}{2}$$

Exercice BL-8

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On note $U = |X - Y|$ (valeur absolue de $X - Y$) et $V = \min(X, Y)$.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par U et V ?
b) Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. a) Déterminer la loi de U et la loi de V .
b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. a) La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, ainsi que la variable aléatoire Y . Par conséquent U prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et V dans $\mathbb{N}^*$.

b) On a $P[(U = m) \cap (V = n)] = P[|X - Y| = m, \min(X, Y) = n]$.

★ Si $m = 0$, par indépendance des variables X et Y :

$$P[(U = 0) \cap (V = n)] = P[(X = n) \cap (Y = n)] = p^2 q^{2n-2}.$$

★ Si $m \in \mathbb{N}^*$, par disjonction des cas possibles :

$$P[(U = m) \cap (V = n)] = P[(X = m+n) \cap (Y = n)] + P[(X = n) \cap (Y = m+n)]$$

et, par équiprobabilité de ces deux événements et indépendance de X et Y :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, P[(U = m) \cap (V = n)] = 2q^2 p^{m+2n-2}$$

$$2. a) \star P(U = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P[(U = 0) \cap (V = n)] = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 (q^2)^{n-1} = \frac{q^2}{1 - p^2} :$$

$$P(U = 0) = \frac{q}{1 + p}$$

$$\text{Pour } m > 0, P(U = m) = \sum_{n=1}^{\infty} 2q^2 p^m (p^2)^{n-1} = \frac{2qp^m}{1 + m}$$

★ La loi de V est donnée par : $\forall n \geq 1$,

$$P(V = n) = \sum_{m=0}^{\infty} P[(U = m) \cap (V = n)] = q^2 p^{2n-2} + \sum_{m=1}^{\infty} 2q^2 p^{2n-1} p^{m-1}$$

Soit :

$$P(V = n) = q^2 p^{2n-2} + 2qp^{2n-1} = (1+p)qp^{2n-2}$$

b) On vérifie aisément que, dans tous les cas :

$$P[(U = m) \cap (V = n)] = P(U = m)P(V = n)$$

Les variables U et V sont donc indépendantes.

Exercice BL-9

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant toutes trois la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $P(X + Y = Z)$.

Solution :

$$1. P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = Y = k) = \sum_{k=1}^n P(X = k) \cdot P(Y = k) = \frac{1}{n}$$

2. La variable $X+Y$ prend ses valeurs entre 2 et $2n$, et il convient de distinguer selon que $k > n+1$ ou $k \leq n+1$:

$$\text{Si } 2 \leq k \leq n+1, P(X+Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k-i) = \frac{k-1}{n^2}$$

$$\text{Si } 2n \geq k > n+1, P(X+Y = k) = \sum_{i=k-n}^n P(X = i)P(Y = k-i) = \frac{2n-k+1}{n^2}$$

$$3. P(X+Y = Z) = \sum_{k=1}^n P(X+Y = k)P(Z = k) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{n-1}{n^2}$$

Exercice BL-10

Un joueur lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, le nombre de fois juste nécessaire pour que chaque dé ait fait apparaître le numéro 6. Soit X le nombre aléatoire de jets ainsi effectués.

1. Déterminer la fonction de répartition de X .
2. Déterminer la loi de X .
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Dans l'affirmative quelle est sa valeur ?

Solution :

1. Numérotions les deux dés et notons X_i le temps d'attente du premier six sur le dé numéro i . Chaque variable X_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

On a $X = \sup(X_1, X_2)$ et, par indépendance :

$$\forall n \geq 1, P(X \leq n) = P(X_1 \leq n) \cdot P(X_2 \leq n)$$

Or $P(X_i \leq n) = 1 - P(X_i > n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et donc :

$$\forall n \geq 1, P(X \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2$$

On constate que le résultat reste valable pour $n = 0$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n-1) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^2$$

Soit, après développement et simplifications :

$$\forall n \geq 1, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}$$

3. La convergence de toute série du type $\sum nq^n$, avec $|q| < 1$ étant connue, la série définissant l'espérance de X est convergente, et on peut même séparer les sommations :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$E(X) = \frac{96}{11}$$

Exercice BL-13

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X . On pose $Y = e^{X+1}$.

1. Déterminer, en fonction de Φ , la fonction de répartition de Y .
2. En déduire une densité f de Y .

3. Y admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, P(Y \leq x) = P(X \leq -1 + \ln x) = \Phi(-1 + \ln x).$$

2. Une densité f de Y est donc donnée, par dérivation, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \varphi(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, il vient :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} \exp(-\frac{1}{2} \ln^2 x)$$

3. Y admet une espérance si et seulement si $x \mapsto x.f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, x^2.xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} \exp(3 \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par la règle de Riemann, $\int_1^{+\infty} xf(x) dx$ converge

tandis que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$ et donc $\int_0^1 xf(x) dx$ n'est pas une intégrale impropre.

Par conséquent Y admet une espérance.

(Il est d'ailleurs possible de calculer cette espérance, à partir du théorème de transfert, par « canonisation » du trinôme obtenu dans l'exponentielle ...)

Exercice BL-14

Soit $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, a étant un paramètre réel.

On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M_a relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les valeurs propres de M_a . La matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Solution :

Par la méthode du pivot, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 2a$. Il est donc nécessaire de discuter :

★ Si $a = 1$, l'unique valeur propre est 2 et si M_1 était diagonalisable, elle serait semblable à $2I$, donc serait égale à $2I$, ce qui est faux. Donc M_1 n'est pas diagonalisable.

★ Si $a \neq 1$, la matrice M_a admet deux valeurs propres : 2 et $2a$.

$$M_a X = 2X \iff \begin{cases} (a-1)x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \\ -x + y + (2a-3)z = 0 \\ (a-2)x + (2-a)y + (3a-4)z = 0 \end{cases}$$

Comme $a \neq 1$, il reste : $E_{(2)} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M_a X = 2aX \iff \begin{cases} (1-a)x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \\ -x + (3-2a)y + (2a-3)z = 0 \\ (a-2)x + (2-a)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

Si $a = 2$, $E_{(4)} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et M_2 est diagonalisable.

Sinon, $E_{(2a)} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et M_a n'est pas diagonalisable.

En conclusion, seule la matrice M_2 est diagonalisable.