1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère une fonction continue f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les hypothèses (H) suivantes :

i) $f(1) = 0$,

ii) f dérivable en 1 avec $f'(1) \neq 0$,

iii) $(x-1)f(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$,

iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{f(x)} = 0$.

On pose pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{f(t)}\,dt$.

1. Montrer que G est ainsi bien définie. Quel est le signe de $G(x)$?

2. a) Montrer qu'au voisinage de 1, $f(x)$ est équivalent à $(x-1)f'(1)$.

b) On pose $H(x) = \dfrac{1}{f'(1)}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$.

c) Montrer que $H(x) - G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

d) En déduire que G se prolonge par continuité en 1 et donner la valeur λ permettant ce prolongement.

3. Montrer que G se prolonge par continuité en 0^+ par 0. On note $\widetilde{G}$ la fonction ainsi prolongée en 0 et en 1.

4. Soit F une primitive de $\dfrac{1}{f}$ sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Exprimer G en fonction de F. En déduire que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et donner l'expression de G' en fonction de f.

5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ vérifie les hypothèses (H). Étudier les variations de la fonction $\widetilde{G}$ associée, en particulier la limite en $+\infty$ et la dérivabilité en 1.

Solution :

1. $\star$ Pour $x \in]0,1[$, on a : $0 < x^2 < x < 1$. Ainsi $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [x^2, x]$, ce qui montre que $G(x)$ est bien défini. Par ailleurs, G est positive sur cet intervalle, puisque $f(t) < 0$ et que les bornes d'intégration sont dans l'ordre décroissant.

$\star$ Pour $x > 1$, on a : $1 < x < x^2$. Ainsi $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [x, x^2]$, ce qui montre que $G(x)$ est bien défini. Par ailleurs, G est positive sur cet intervalle, puisque $f(t) > 0$ et que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

2. a) Par définition de la dérivée en $x = 1$, on a au voisinage de 1 :

$$f(x) - f(1) \sim (x-1)f'(1)$$

On obtient le résultat demandé puisque $f(1) = 0$,

b) Il suffit d'intégrer pour obtenir :

$$\lim_{x\to 1} H(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{f'(1)}\big(\ln|x^2-1| - \ln|x-1|\big) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln|x+1|}{f'(1)} = \frac{\ln 2}{f'(1)}.$$

c) On sait, par la question 2. a), qu'au voisinage de 1, $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{(x-1)f'(1)}$.

Ce qui s'écrit $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{(x-1)f'(1)} \underset{(1)}{=} o\big(\dfrac{1}{x-1}\big)$, ou encore :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < |t-1| < \delta$, alors :

$$\Big|\frac{1}{(t-1)f'(1)} - \frac{1}{f(t)}\Big| < \varepsilon\,\frac{1}{|t-1|}$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, en séparant les deux cas $x < 1$ et $x > 1$.

$\rightarrow$ Si $x > 1$, prenons x tel que $x^2 < 1 + \delta$, alors $[x, x^2] \subset]1, 1+\delta]$ et :

$$|H(x) - G(x)| \leqslant \int_x^{x^2} \Big|\frac{1}{(t-1)f'(1)} - \frac{1}{f(t)}\Big|\,dt \leqslant \varepsilon \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \varepsilon \ln(x+1)$$

$\rightarrow$ Si $x < 1$, prenons x tel que $1 - \delta < x^2$, alors $[x^2, x] \subset [1-\delta, 1[$ et on conclut de même.

En regroupant les deux résultats, on a donc :

$$\text{pour } x \text{ assez proche de 1, } |H(x) - G(x)| < \varepsilon \ln(x+1) < \varepsilon \ln 3$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} [H(x) - G(x)] = 0.$$

d) Ainsi G et H admettent la même limite en $x = 1$, soit $\dfrac{\ln 2}{f'(1)}$.

3. Par la propriété iv, on sait qu'au voisinage de 0, $\dfrac{1}{f(x)} = o\big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\big)$, ce qui montre la convergence de l'intégrale de $\dfrac{1}{f}$ en 0.

Lorsque x tend vers 0, il en est de même pour x^2 et donc $\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0$.

4. On a $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et, pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$:

$$G'(x) = \frac{2x}{f(x^2)} - \frac{1}{f(x)}$$

5. Les hypothèses i et ii sont trivialement vérifiées. Il est clair que pour $x > 0$, tel que $x \neq 1$, on a $(x-1)\ln x > 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = 0$. Ainsi $f : x \mapsto \ln x$ vérifie les hypothèses de l'exercice.
Or $G'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} > 0$. Ainsi G, (donc aussi $\widetilde{G}$) est croissante.
Par théorème, le fait que G' ait une limite en 1 montre que $\widetilde{G}$, qui est continue en 1, est dérivable en 1, avec : $\widetilde{G}'(1) = \lim\limits_{t\to 1} G'(t) = 1$.
Enfin, pour $x > 1$, on a : $G(x) \geqslant \dfrac{x^2 - x}{\ln x^2} = \dfrac{x^2 - x}{2\ln x}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

Exercice 1.2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $I = [a,b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que f est convexe sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

1. a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

b) Soit u un réel de I. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

2. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

On définit la suite $(x_n)_n$ par : $x_0 \in [a,c[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers c.

b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que pour tout x de I :

$$|g(x) - c| \leqslant (x-c)^2 \frac{M}{2m}$$

c) En déduire qu'il existe un réel k strictement positif tel que pour tout naturel n on a l'inégalité :

$$|x_n - c| \leqslant k\Big(\frac{x_0 - c}{k}\Big)^{2^n}.$$

Solution :

1. a) La fonction f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ et vérifie $f(a)\times f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires (version stricte, dite aussi théorème de la bijection) permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u est donnée par $y = f'(u)(x-u) + f(u)$.
Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point d'ordonnée nulle, donc son abscisse x vérifie :

$$x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

2. a) La fonction g est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout x de cet intervalle

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$\star$ Pour $x \in [a,c]$, on a : $f(x) \geqslant 0$ (puisque f est décroissante et $f(c) = 0$) et comme $f''(x) > 0$, la fonction g est croissante sur $[a,c]$, et $g(c) = c$ entraîne :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [a,b], g(x) \leqslant c.$$

$\star$ Pour $x \in [a,c]$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) < 0$, donc $g(x) \geqslant x \geqslant a$.

Ainsi, l'intervalle $[a,c]$ est stable par la fonction g. Comme $x_0 \in [a,c]$, on obtient par récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 0, x_n \in [a,c]$.
On a également, pour tout $n \geqslant 0$: $x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n \geqslant 0$.

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est croissante, majorée par c, donc convergente vers une limite ℓ.
Puisque g est continue, ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$, soit $f(\ell) = 0$, et finalement

$$\ell = c.$$

b) La fonction f est de classe C^2 sur $[a,b]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}|f(c) - f(x) - (c-x)f'(x)| &\leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \sup_{t\in[c,x]} |f''(t)|\\ &\leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|\end{aligned}$$

Or on sait que $|f'|$ est une fonction continue sur $[a,b]$ qui ne s'annule pas : il existe donc deux constantes m et M vérifiant $0 < m \leqslant M$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$:

$$m \leqslant |f'(x)| \leqslant M$$

Ceci donne :

$$\Big|\frac{f(c) - f(x)}{f'(x)} - (c-x)\Big| \leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

soit :

$$|g(x) - c| \leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

c) Posons $\lambda = \dfrac{M}{2m}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$|x_{n+1} - c| = |g(x_n) - c| \leqslant \lambda|x_n - c|^2.$$

D'où :
$|x_1 - c| \leqslant \lambda|x_0 - c|^2$, puis $|x_2 - c| \leqslant \lambda(x_1 - c)^2 \leqslant \lambda^3|x_0 - c|^4$,
$|x_3 - c| \leqslant \lambda(x_2 - c)^2 \leqslant \lambda^7(x_0 - c)^8$ et par une récurrence élémentaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant \lambda^{2^n - 1}|x_0 - c|^{2^n}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant \frac{1}{\lambda}\big(\lambda|x_0 - c|\big)^{2^n}$$

On prend donc $k = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2m}{M}$.

Exercice 1.3.

Pour $x > 0$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser le signe de $f(x)$.

2. Montrer que f est croissante.

3. A l'aide de transformations simples, montrer que pour $a > 0$, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{xa}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

4. a) Montrer que pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t$. En déduire $\lim\limits_{a \to 0^+} \displaystyle\int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt$.

b) En déduire que $f(x) = \ln x$.

5. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln u}\, du = \ln 2$.

6. Soit $x > 1$ fixé. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t \ln x} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par négligeabilité classique, au voisinage de $+\infty$, $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, ceci pour tout $x > 0$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ converge.

Au voisinage de 0, un développement limité de la fonction exponentielle donne $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = x - 1$. La fonction φ admet donc un prolongement par continuité en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ est « faussement impropre ».

En résumé, pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe bien. De plus, comme $x > 0$, $e^{-t} - e^{-xt} > 0$ et $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit $0 \leqslant x < y$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-xt} \geqslant e^{-yt}$, donc $e^{-t} - e^{-xt} \leqslant e^{-t} - e^{-yt}$, ce qui entraîne que $f(x) \leqslant f(y)$.

3. Soit $a > 0$. Chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$ est convergente (voir la première question). On peut donc écrire :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$$

Le changement de variable de classe C^1, bijectif, $u = xt$ dans la seconde intégrale donne :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{xa}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

et la relation de Chasles donne :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \, dt = \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

4. a) L'inégalité des accroissements finis pour $u \mapsto e^{-u}$ sur l'intervalle $[0, t]$ donne $0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t$.

Donc, pour $x \geqslant 1$: $\left| \displaystyle\int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt \right| \leqslant \displaystyle\int_a^{xa} dt = a(x-1)$

ce qui entraîne que :

$$\lim_{a \to 0} \int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt = 0$$

On procède de même pour $x < 1$.

b) Comme $\displaystyle\int_a^{xa} \frac{dt}{t} = \ln x$, on peut écrire

$$\left| \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t} \, dt - \ln x \right| = \left| \int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t} \, dt \right| \leqslant |a(x-1)|$$

Et donc : $\displaystyle\lim_{a \to 0} \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t} \, dt = \ln x$. C'est-à-dire $f(x) = \ln x$.

5. L'application $t \mapsto u = e^{-t}$ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$. Donc :

$$\ln x = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \, dt = \int_0^1 \frac{u^{x-1} - 1}{\ln u} \, du$$

Donc $\ln 2 = f(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u - 1}{\ln u} \, du$

6. a) La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et positive. De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \, dt = 1$. La fonction g est donc une densité de probabilité.

b) On a $E(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t g(t) \, dt = \frac{x - 1}{\ln x}$

et $E(Y^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 g(t) \, dt = \frac{x^2 - 1}{x^2 \ln x}$.

Ce qui donne :

$$V(Y) = \frac{(x-1)[(x+1)\ln x - (x-1)]}{x^2 \ln x}$$

Exercice 1.4.

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Étudier l'existence de l'intégrale $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n (\ln t)^p \, dt$.
La calculer lorsqu'elle existe.

2. Pour quelles valeurs de x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{xt} - 1}{\ln t} \, dt$ est–elle convergente ?

On définit ainsi le domaine de définition D d'une fonction F par, pour tout $x \in D$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{xt} - 1}{\ln t} \, dt$$

3. On rappelle que pour tout réel a, on a : $\mathrm{e}^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

a) Étudier la fonction g définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $g(t) = t \ln t$.

b) Soit $x \in D, t \in]0,1]$. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge, où :

$$u_k = \frac{x^k t (t \ln t)^{k-1}}{k!}$$

c) Montrer que pour tout $x \in D$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} I_{k,k-1} = \int_0^1 \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} t (t \ln t)^{k-1} \Big) dt$$

En déduire une expression de F sous forme d'une somme de série pour des valeurs de x à préciser.

Solution :

1. $\star$ Si $n \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p} : t \mapsto t^n (\ln t)^p$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_{n,p}(0) = 0$.

$\star$ Pour tout p de $\mathbb{N}$, $t \mapsto (\ln t)^p$ est continue sur $]0,1]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^p \, dt$ converge car on a $(\ln t)^p = o\big(\frac{1}{\sqrt{t}}\big)$ au voisinage de 0.

L'intégrale définissant $I_{n,p}$ est convergente pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Pour $p \geqslant 1$, préparons une intégration par parties :

$u'(t) = t^n \Longleftarrow u(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$; $v(t) = (\ln t)^p \implies v'(t) = \frac{p}{t} (\ln t)^{p-1}$

Comme $\lim_0 uv = 0$ et $u(1)v(1) = 0$, l'intégration par parties est légitime sur l'intervalle d'intégration et donne :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$

Et, par récurrence descendante :

$$I_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} I_{n,0} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} \int_0^1 t^n \, dt = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

On constate que la formule obtenue est encore valable pour $p = 0$.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xt \ln t} - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, et comme $\mathrm{e}^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$:

- au voisinage de 0, $\varphi(t) \sim xt$, donc $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.
- au voisinage de 1, $\varphi(t) \sim xt$, donc $\lim_{t \to 1} \varphi(t) = x$.

Ainsi φ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, et $F(x)$ existe pour tout x réel.

3. a) Une étude rapide montre que g est décroissante sur $[0, 1/\mathrm{e}]$, et croissante sur $[1/\mathrm{e}, 1]$. Elle s'annule en 0 et en 1. Elle reste donc négative sur $[0,1]$ et atteint son *minimum* en $1/\mathrm{e}$, ce *minimum* valant $-1/\mathrm{e}$.

b) Posons $u_k(t) = \dfrac{x^k t (t \ln t)^{k-1}}{k!}$. On a $u_k(0) = u_k(1) = 0$.

Pour $t\in]0,1[$, on a $u_k(t)=\dfrac{1}{\ln t}\times\dfrac{(xt\ln t)^k}{k!}$, qui est le terme général d'une série de référence convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)=\frac{1}{\ln t}\times(\mathrm{e}^{xt\ln t}-1)=\frac{1}{\ln t}\times(t^{xt}-1)$$

c) Ainsi

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(xt\ln t)^k}{k!(\ln t)}\,dt\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^k(\ln t)^{k-1}\,dt+\int_0^1\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t(t\ln t)^{k-1}\,dt\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}I_{k,k-1}+\int_0^1 R_n(t)dt,\text{ avec }R_n(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t(t\ln t)^{k-1}\end{aligned}$$

Or, pour $t\in]0,1]$:

$$\big|R_n(t)\big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t|g(t)|^{k-1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}}\Big)^{k-1}\text{ (voir 3.a))}$$

et donc :

$$\Big|\int_0^1 R_n(t)\,dt\Big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}}\Big)^{k-1}=\mathrm{e}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(x/\mathrm{e})^k}{k!}\underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}0$$

comme reste d'une série convergente.

Ainsi :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}I_{k,k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k(k+1)^k}$$

Exercice 1.5.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{\ln x}{2} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

2. Construire le tableau des variations de f et montrer que pour $x>1$ on a $f(x)<x$.

Soit a un nombre réel tel que $a>1$.

3. Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de réels vérifiant $x_0=a$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1}=f(x_n)$.

4. Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite ℓ.

5. Ecrire un programme Pascal permettant d'obtenir la première valeur de n pour laquelle $|x_n-\ell|\leqslant 10^{-4}$.

6. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$:

$$|x_{n+1}-\ell|\leqslant\frac{1}{3}|x_n-\ell|$$

7. En déduire que la suite $(x_n-\ell)_n$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_n$.

Solution :

1. La fonction f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, comme quotient et produit de fonctions continues.
Au voisinage de $x=1$, on écrit $x=1+h$. Alors :

$$f(x)=\frac{2+h}{2}\times\frac{\ln(1+h)}{h}\sim\left(1+\frac{h}{2}\right)\to 1$$

Ainsi f est continue sur $]0,+\infty[$.

Sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, f est dérivable comme quotient et produit de fonctions dérivables. Pour tout $x\neq 1$

$$f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}$$

Cette fonction est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. En posant $x=1+h$, il vient :

$$f'(1+h)=\frac{h-\ln(1+h)}{h^2}-\frac{1}{2(1+h)}=\frac{1}{2}+o(1)-\frac{1}{2(1+h)}\underset{(h\to 0)}{\to}0$$

Par théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(1)=0$.

2. La concavité de la fonction logarithme permet d'écrire, pour $x>0$: $\ln x\leqslant x-1$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)=-2x\ln x+x^2-1$.
Or $g'(x)=-2(\ln x-(x-1))>0$. La fonction g est donc croissante et $g(1)=0$, ce qui prouve que g est positive sur $]1,+\infty[$ et négative sur $]0,1[$.
Ceci permet de conclure que f est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$. De plus, pour $x>1$:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{\ln x}{2}\leqslant\frac{x+1}{2}<x$$

3. Comme f est croissante sur $]1,+\infty[$ et comme $f(1)=1$, on montre par récurrence immédiate que si $x_0\geqslant 1$, alors, pour tout $n\geqslant 0, x_n\geqslant 1$.

4. On sait que pour tout $n\geqslant 0$, $x_{n+1}=f(x_n)<x_n$. La suite (x_n) est décroissante, minorée par 1 ; elle converge vers $\ell\geqslant 1$ qui vérifie $f(\ell)=\ell$ (puisque f est continue). L'unique point fixe de f étant 1, il vient $\ell=1$.

5. Voici une proposition de programme :

```
PROGRAM Boucle
Var n : integer
    a : real ;
Begin
n := 0 ;
Readln(a) ;
Repeat
  n := n+1 ;
  a :=(a+1)/(a-1)*ln(a)/2
Until abs(a-1)<=0.0001 ;
Writeln(n) ;
Readln
End.
```

6. Par le théorème des accroissements finis, comme f est continue sur $[1,x_n]$, dérivable sur $]1,x_n[$, il existe $c_n\in]1,x_n[$ tel que $x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$. Comme la suite (x_n) tend vers 1, il en est de même de la suite (c_n), et comme f' est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(c_n)=f'(1)=0$.

Il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant f'(c_n) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

7. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|x_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n-n_0} |x_{n_0} - \ell|$.
Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \ell|}{(1/2)^n} = 0$.

Exercice 1.6.
Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

1. Intégrer (E) sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$)

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

2. a) Donner le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 2.
   b) Étudier les variations de f sur I.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall\, x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$
Préciser la relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

4. a) Déterminer le degré d_n de P_n.
   b) On appelle valuation d'un polynôme P, le degré du monôme de plus bas degré de P. Par exemple, si $P(X) = 4X^7 + 3X^4 - 5X^2$, la valuation de P est égale à 2.
Déterminer la valuation v_n du polynôme P_n.

5. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), montrer que pour tout $n \geqslant 0$:
$$P_{n+1}(X) = ((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)$$
Soit Q_n le polynôme défini par $Q_n(X) = \dfrac{P_n(X)}{X^{v_n}}$, et soit $a_n = Q_n(0)$, $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et $c_n = b_n - b_{n-1}$.
En exprimant c_{n+1} en fonction de c_n, exprimer a_n en fonction de n.

Solution :

1. Pour $x \in]-\infty, 1[$, on a $(1-x)^2 \neq 0$. Donc :
$$(1-x)^2y'(x) = (2-x)y(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$
$x \mapsto \ln|y(x)|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ et deux fonctions ayant même dérivée sur un intervalle diffèrent d'une constante, donc $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, x < 1, \ln|y(x)| = C - \ln(1-x) - \frac{1}{1-x},$$
Comme $y(x) \neq 0$, $y(x)$ garde un signe fixe et :

$$y(x) = \frac{K}{1-x} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right), \text{ avec } K = \pm \mathrm{e}^C$$

2. a) Au voisinage de 0, la fonction f est de classe C^∞. On peut donc écrire :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$$

Or f est une solution de l'équation différentielle précédente. Donc $f'(0) = 2f(0)$, et $(1-x)^2 f''(x) - 2(1-x)f'(x) = (2-x)f'(x) - f(x) \implies f''(0) = 4f'(0) - f(0)$

Finalement $f(0) = \mathrm{e}$, $f'(0) = 2\mathrm{e}$ et $f''(0) = 7\mathrm{e}$, soit :

$$f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \frac{7\mathrm{e}}{2} x^2 + o(x^2)$$

b) Comme, pour tout $x \leqslant 1$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2} f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$, on a $f'(x) \geqslant 0$ sur $I =]-\infty, 1[$. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle et induit une bijection de I sur $]0, +\infty[$.

3. Montrons cette relation par récurrence sur n.

⋆ La relation est vraie pour $n = 0$, avec $P_0(X) = X$.

⋆ Supposons que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$, on a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right] \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$, avec :

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n'(X) + P_n(X))$$

On conclut par le principe de récurrence.

4. a) On sait que $\deg(P_0) = 1$. Notons $d_n = \deg(P_n)$.
Alors, par la relation précédente, $d_{n+1} = \deg(P_{n+1}) = d_n + 2$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$d_n = 2n + 1.$$

b) On sait que $v_0 = 1$. Si on écrit, dans l'ordre des puissances décroissantes : $P_n(X) = x^{d_n} + \cdots + \alpha_n x^{v_n}$, alors :

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n'(X) + P_n(X)) = X^{d_n+2} + \cdots + \alpha_n v_n X^{v_n+1}$$

Donc $v_{n+1} = v_n + 1$ et $v_n = n + 1$.

5. On a : $\dfrac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^2 y'(x)\right) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left((2-x)y(x)\right)$.

soit, par la formule de Leibniz :

$$(1-x)^2 y^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) \\ = (2-x)y^{(n)}(x) - ny^{(n-1)}(x)$$

ou encore :

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{2n}{1-x} y^{(n)}(x) + \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) y^{(n)}(x) - \frac{n^2}{(1-x)^2} y^{(n-1)}(x)$$

soit en posant $X = \dfrac{1}{1-x}$:

$$P_{n+1}(X) = \left((2n+1)X + X^2\right) P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

Ainsi :

$$Q_{n+1}(X) = \frac{P_{n+1}(X)}{X^{n+1}} = (2n + 1 + X) Q_n(X) - n^2 Q_{n-1}(X)$$

et $a_{n+1} = (2n+1)a_n - n^2 a_{n-1}$.

En posant $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$, il vient $b_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} b_n - \dfrac{n}{n+1} b_{n-1}$, ou :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n}{n+1}\big(b_n - b_{n-1}\big)$$

En posant $c_n = n(b_n - b_{n-1})$, il vient $c_{n+1} = c_n$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = c_1 = b_1 - b_0 = 0$. Donc, pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_n = b_0 = 1 \text{ et } a_n = n!.$$

Exercice 1.7.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$ par récurrence sur n en posant :

$$u_0 = a \text{ et pour } n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

a) Étudier cette suite.

b) Prouver que pour tout $n \geqslant 0$, on a : $u_{n+1}^2 = a^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$.

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurence sur n en posant :

$$u_0 = a_0 \text{ et pour } n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

a) Donner une condition nécessaire simple, portant sur la suite $\big(a_n\big)_{n\geqslant 0}$, pour que la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n^2 = a_0^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k^2}{u_k^2} + 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$.

c) En déduire une condition, portant sur la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, équivalente à la convergence de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$.

d) On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0,1[$. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers une limite que l'on notera ℓ. Donner un équivalent de $\ell^2 - u_n^2$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On montre, par une récurrence immédiate, que pour tout $n \geqslant 0, u_n > 0$, donc u_n est bien défini et comme $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Supposons que cette suite soit majorée. Dans ce cas elle convergerait vers une limite ℓ et on aurait : $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{u_n}$. La contradiction est claire.

La suite $(u_n)_n$ positive, n'est pas majorée et est croissante. Elle tend vers $+\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n} \big(u_k^2 + \frac{k^2}{u_k^2} + 2k\big) = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$$

Par soustraction, il vient :

$$(\star) \qquad u_{n+1}^2 = a^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$$

c) On remarque que l'égalité précédente montre que pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$u_k \geqslant \sqrt{k(k-1)}\,;\ \text{d'où } \frac{k^2}{u_k^2} \leqslant \frac{k}{k-1} \leqslant 2$$

On reporte cette inégalité dans la relation $(\star)$. Il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &\leqslant a^2 + \frac{1}{a^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} + n(n+1) \\ &\leqslant a^2 + \frac{1}{a^2} + 2(n-1) + n(n+1) \end{aligned}$$

soit : $n(n+1) \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant a^2 + \dfrac{1}{a^2} + 2(n-1) + n(n+1)$. On en déduit que :

$$u_n \sim n.$$

2. a) La suite $(a_n)_n$ étant une suite positive, on en déduit immédiatement que la suite $(u_n)_n$ est bien définie, à termes strictement positifs, et qu'elle est strictement croissante.

Supposons qu'elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell > a_0 > 0$. Il vient :

$$0 = \lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{u_n} = \frac{1}{\ell} \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_n$ converge, alors la suite $(a_n)_n$ tend vers 0.

b) La relation de récurrence permet d'écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

On en déduit la relation demandée :

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

c) $\star$ Si la suite $(u_n)_n$ converge de limite ℓ, la relation précédente implique que :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} \geqslant 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Il en résulte, puisque la suite $(a_n)_n$ est à termes positifs, que la série $\sum a_n$ converge.

$\star$ Réciproquement, si la série $\sum a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$; cela entraîne que $a_n^2 \leqslant a_n$, à partir d'un certain rang et donc que la série $\sum a_n^2$ converge. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leqslant a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &\leqslant a_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Cela montre que la suite $(u_n)_n$ est majorée, donc qu'elle converge.

d) Dans le cas où $a_n = r^n$, avec $r \in]0,1[$, la question précédente montre que la suite $(u_n)_n$ converge, puisque que la série $\sum r^k$ converge. On a alors :

$$u_n^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + 2 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

puis par passage à la limite :

$$\ell^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + \frac{2}{1-r}$$

D'où :

$$\ell^2 - u_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + \frac{2r^n}{1-r}$$

Par suite, on a :

$$1 \leqslant \frac{(\ell^2 - u_n^2)(1-r)}{2r^n} \leqslant \frac{1}{(1+r)u_n^2}\, r^n + 1$$

Donc :

$$\ell^2 - u_n^2 \sim \frac{2r^n}{1-r}$$

Exercice 1.8.

Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en posant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leqslant S_n \leqslant \frac{n^{1-a}-1}{1-a} + 1$$

2. Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers l'infini.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} - S_n$

a) Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $S_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} + \ell + o(1)$.

4. Dans cette question on s'intéresse à la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

a) Prouver la convergence de la suite $n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^a}$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$. Calculer sa somme en fonction de ℓ et de a.

Solution :

1. On utilise la technique de comparaison «série-intégrale», avec la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$, qui est positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^a} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leqslant \frac{1}{k^a}$$

En sommant ces inégalités, il vient, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^a} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^a} = \frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leqslant S_n$$

Soit :

$$\frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leqslant S_n \leqslant \frac{n^{1-a}-1}{1-a} + 1$$

2. Par la question précédente :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-a}-\frac{1}{n^{1-a}} \leqslant \frac{1-a}{n^{1-a}} S_n \leqslant 1-\frac{a}{n^{1-a}}$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a}{n^{1-a}}\, S_n = 1$, ce qui est se traduit par :

$$S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}.$$

3. a) On voit que $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(n+1)^{1-a}-n^{1-a}}{1-a} - \dfrac{1}{(n+1)^a}$.

Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ si et seulement si :

$$n+1-n^{1-a}(n+1)^a \geqslant 1-a$$

ou :

$$1+\frac{a}{n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

Soit $\varphi : x \mapsto 1+ax-(1+x)^a$, on a :

$$\forall\, x \geqslant 0, \varphi'(x) = a - a(1+x)^{a-1} = a - a\frac{1}{(1+x)^{1-a}} \geqslant 0$$

Comme $\varphi(0)=0$, φ est positive sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

D'autre part, par la première question :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant \frac{n^{1-a}-(n+1)^{1-a}}{1-a} = \frac{1}{(1-a)n^{1-a}} \times \left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-a}\right)$$

Le suite $(u_n)_n$ est donc une suite majorée par une suite convergente (de limite nulle) : elle est donc bornée. Comme elle est croissante, on en déduit qu'elle converge.

b) Il reste à poser $\ell = -\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. a) On a

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^a} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^a}\\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^a} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^a} = S_{2n} - \frac{2}{2^a}\, S_n\\
&= \frac{(2n)^{1-a}-1}{1-a} + \ell + \varepsilon_{2n} - 2^{1-a}\left(\frac{n^{1-a}-1}{1-a} + \ell + \varepsilon_n\right)\\
&= \frac{2^{1-a}-1}{1-a} + (1-2^{1-a})\ell + \varepsilon_{2n} - 2^{1-a}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{2^{1-a}-1}{1-a} + (1-2^{1-a})\ell$$

b) On remarque que $v_{2n+1} = v_{2n} + \dfrac{1}{(2n+1)^a}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}$ et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a} = (2^{1-a}-1)\left(\frac{1}{1-a} - \ell\right)$$

Exercice 1.9.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On note E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Pour tout $f \in E$, on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_0^1 L(f)(t)\,dt = 0$.

1. Vérifier que l'application L est ainsi bien définie et constitue une application linéaire de E vers E.

2. a) Déterminer le noyau de L.

b) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction de L à E_1 réalise-t-elle un automorphisme de E_1 ?

3. Montrer que pour tout t de $[0,1]$, on a : $L(f)(t) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)\,du\Big)dx$.

4. On pose $L^0 = Id$ et, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $L^n = L \circ L^{n-1}$. Pour tout x de $[0,1]$, on pose alors $P_0(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $P_n(x) = L^n(P_0)(x)$.

a) Calculer P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Solution :

1. La fonction f étant continue, elle admet des primitives et le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que ses primitives sont de la forme :

$$x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt + C = F_1(x) + C,$$

où C est un réel.

La condition $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx = 0$ fixe la constante C, avec : $C = -\displaystyle\int_0^1 F_1(x)\,dx$.

Il existe donc une unique primitive de f telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx = 0$.

La linéarité de l'application L se vérifie de façon immédiate. De plus F est de classe C^1 donc continue sur $[0,1]$. Ainsi L est un endomorphisme de E.

2. a) On a $f \in \operatorname{Ker} L \iff L(f) = 0$.

Or : $L(f) = 0 \implies \forall\, t \in [0,1],\ [L(f)]'(t) = f(t) = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

b) L'application L n'est pas surjective puisque $L(f) \in C^1([0,1],\mathbb{R})$: il suffit alors de donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ et qui ne soit pas de classe C^1, la fonction $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ convient.

3. On a vu que $F_1 : t \mapsto \displaystyle\int_0^t f(t)\,dt$ est la primitive de f nulle en 0 et que

$$L(f)(t) = F_1(t) - C = \int_0^t f(u)\,du - \int_0^1 \Big(\int_0^x f(u)\,du\Big)\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^t f(u)\,du - \int_0^x f(u)\,du \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)\,du \Big) dx$$

4. a) Un calcul immédiat donne :

$$P_0 = 1, P_1(t) = t - \frac{1}{2}, P_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12}.$$

On remarque que $P_2(0) = P_2(1)$

b) Montrons la relation demandée par récurrence sur n :

• $n = 1$: $P_1(x+1) - P_1(x) = x + \frac{1}{2} - \big(x - \frac{1}{2}\big) = 1$

• Supposons la relation vérifiée pour un certain $n > 1$. On sait que pour tout x, on a : $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$. Donc :

$$\frac{d}{dx}\big(P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) - \frac{x^n}{n!}\big) = P_n(x+1) - P_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 0.$$

Ce qui entraîne qu'il existe une constante C_n telle que :

$$P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!} + C_n$$

Mais, pour $n \geqslant 1$:

$$P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) = \int_0^1 P'_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 P_n(t)\,dt = \int_0^1 L(P_{n-1})(t)\,dt = 0$$

Ainsi $C_n = 0$ et on a le résultat voulu au rang $n+1$.
On conclut par le principe de récurrence :

c) Pour $n = 3$, on sait que $P_3(k+1) - P_3(k) = \frac{k^2}{2}$, pour $k \geqslant 0$. En sommant :

$$P_3(n+1) - P_3(1) = \sum_{k=1}^{n} \big(P_3(k+1) - P_3(k)\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2}$$

Or $P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2[P_3(n+1) - P_3(1)] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 1.10.

1. a) Montrer qu'il existe une constante C, que l'on déterminera, telle que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C.\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres.

2. a) Que vaut, en fonction de n et k de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2k+1)}\,dx$?

b) Déterminer la limite, lorsque N tend vers l'infini de

$$R_{N,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2N+3)}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} dx$$

3. a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{-2kx}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(X^{2n}) = \frac{4(2n)!}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$$

c) Si l'on remplace $E(X^2)$ par $\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$, montrer que l'errreur commise est inférieure à 10^{-3}.

Solution :

1. a) Si $C \geqslant 0$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive. Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = C\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx = C\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\,dx$$
$$= -C\big[\operatorname{Arc\,tan} \mathrm{e}^{-x}\big]_0^{\to+\infty} = C\operatorname{Arc\,tan} 1 = C\frac{\pi}{4}$$

Donc f est une densité de probabilité pour $C = \frac{4}{\pi}$.

b) Pour tout $k \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^k\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx$ est convergente, car la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et au voisinage de $+\infty$, elle est équivalente à $x \mapsto x^k\mathrm{e}^{-x}$ dont l'intégrale converge (car, par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2{\times}x^k\mathrm{e}^{-x} = 0$.)

2. a) Le changement de variable affine $t = x(2k+1)$ donne :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2k+1)}dx = \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{\Gamma(2n+1)}{(2k+1)^{2n+1}}$$
$$= \frac{(2n)!}{(2k+1)^{2n+1}}$$

b) On peut écrire :

$$\Big|\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)x}dx = \frac{(2n)!}{(2N+3)^{2n+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. a) On a $\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\mathrm{e}^{-2kx} = \dfrac{1-(-\mathrm{e}^{-2x})^{N+1}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

d'où :

$$E(X^{2n}) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx$$
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)x}x^{2n}\Big)\,dx + R_{N,n}(x)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)x}x^{2n}dx + R_{N,n}(x)$$

En prenant la limite en $+\infty$, il vient :

$$E(X^{2n}) = \frac{4}{\pi}(2n)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$$

b) Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et par suite

$$|E(X^2) - S_4| \leqslant |S_5 - S_4| \leqslant \frac{1}{11^3} < 10^{-3}$$

Exercice 1.11.

On pose, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $G(x, y) = \displaystyle\int_0^y \frac{t - [t]}{t(t + x)}\,\mathrm{d}t$, où $[.]$ désigne la partie entière.

1. Montrer que la fonction G est ainsi bien définie.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ fixé, $G(x, y)$ admet une limite positive finie lorsque y tend vers $+\infty$. On notera par la suite $G(x)$ cette limite.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y > 0$; montrer que

$$G(n, y) = \frac{1}{n}\left\{\int_0^n \frac{t - [t]}{t}\,dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t}\,dt\right\}$$

et, en considérant la suite de terme général $H(n) = nG(n)$, en déduire que :

$$G(n) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{n}(n!)^{1/n}\right).$$

4. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \dfrac{1}{2n}$ est convergente. En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

5. Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Si $x > 0$, la fonction rationnelle $t \mapsto \dfrac{1}{t(t + x)}$ ne présente que le pôle 0 sur l'intervalle $[0, y]$. Pour tout $t \in [0, 1[$, $t - \lfloor t \rfloor = t$. Ainsi, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t + x)}$ vaut $\dfrac{1}{t + x}$ sur $[0, 1[$ et est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable sur $[0, y]$.

2. Pour tout $x > 0$ et $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant g_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt$ est donc convergente.

3. On a $\dfrac{1}{t(t + n)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + n}\right)$. Soit, en posant $h(t) = \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t}$

$$\begin{aligned} G(n, y) &= \frac{1}{n}\left(\int_0^y h(t)\,dt - \int_0^y h(t+n)\,dt\right) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y h(t)\,dt - \int_n^{n+y} h(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\int_0^n h(t)\,dt - \int_y^{n+y} h(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

Comme pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$, il vient :

$$\left|\int_y^{n+y} h(t)\,dt\right| \leqslant \ln\left(\frac{y + n}{y}\right) \underset{(y \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n h(t)\,dt$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$:

$$H(n)=\int_0^n\Big(1-\frac{\lfloor t\rfloor}{t}\Big)\,dt$$

ou, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}H(n)&=\int_0^1 dt+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\big(1-\frac{k}{t}\big)dt\\&=1+(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}k\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\end{aligned}$$

Comme $H(k)=H(k-1)+1+(k-1)\ln\big(\dfrac{k}{k-1}\big)$ et

$$H(n)=\sum_{k=2}^{n}[H(k)-H(k-1)]+1,$$

il vient :

$H(n)=n+\ln(n!)-n\ln n$ et $G(n)=\dfrac{H(n)}{n}=\ln\big(\frac{\mathrm{e}}{n}(n!)^{1/n}\big)$

4. Un développement limité à l'ordre 2 du logarithme donne :

$$\begin{aligned}H(n)-H(n-1)&=1-(n-1)\ln\big(1+\frac{1}{n-1}\big)=\frac{1}{2(n-1)}+O\big(\frac{1}{n^2}\big)\\&=\frac{1}{2n}+O\big(\frac{1}{n^2}\big).\end{aligned}$$

Soit, en sommant :

$$H(n)=\frac12\sum_{k=1}^{n}\frac1k+\sum_{k=1}^{n}w_k,\ \text{ avec }\sum w_k\text{ absolument convergente}$$

Donc :

$$H(n)=\frac12(\ln n+\gamma+o(1))+\sum_{k=1}^{n}w_k$$

ce qui donne en particulier :

$$H(n)\underset{(n\to+\infty)}{\sim}\frac{\ln n}{2}\qquad\text{et}\qquad G(n)\underset{(n\to+\infty)}{\sim}\frac{\ln n}{2n}$$

5. La fonction $x\mapsto\dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}$ étant positive, décroissante, la fonction G est décroissante et pour $x>1$, on écrit :

$$\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1\implies G(\lfloor x\rfloor)\leqslant G(x)\leqslant G(\lfloor x\rfloor+1)$$

et

$$\frac{2x}{\ln x}G(\lfloor x\rfloor)\leqslant\frac{2xG(x)}{\ln x}\leqslant\frac{2x}{\ln x}G(\lfloor x\rfloor+1)$$

Or :

$$\lfloor x\rfloor\underset{(\infty)}{\sim}\lfloor x\rfloor+1\underset{(\infty)}{\sim}x\text{ et }\ln\lfloor x\rfloor\underset{(\infty)}{\sim}\ln(\lfloor x\rfloor+1)\underset{(\infty)}{\sim}\ln x$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor=+\infty$, les termes extrêmes de l'encadrement ont pour limite 1 lorsque x tend vers l'infini (résultat de la question 4. aux points $\lfloor x\rfloor$ ou $\lfloor x\rfloor+1$) et donc, par le théorème d'encadrement :

$$G(x)\underset{(x\to+\infty)}{\sim}\frac{\ln x}{2x}$$

Exercice 1.12.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles et λ un réel donné. On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ par, pour tout $x\in[0,1]$:

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ \forall\, n \geqslant 0, u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, u_n est de classe C^n sur $[0,1]$ et donner, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, les différentes dérivées $u_n^{(k)}$ de u_n. En déduire que

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.

b) Soit u réel. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|u|^k}{k!} \leqslant \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ à l'aide d'une intégrale.

d) Soit $t \in [0,x]$.

En écrivant $\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}$ sous forme d'une série, exprimer $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ en fonction de $f(x), \mathrm{e}^{\lambda x}$ et $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,dt$.

Solution :

1. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.

• Pour $n = 0$, $u_0 = f$ est continue sur $[0,1]$.

• Supposons que u_n soit de classe C^n sur $[0,1]$. Alors, par le théorème fondamental du calcul intégral, u_{n+1} est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $u'_{n+1}(x) = \lambda u_n(x)$ avec $u_{n+1}(0) = 0$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

$$u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$$

et comme $u_n(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n(0) = u'_n(0) = \cdots = u_n^{(n-1)}(0) = 0$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} u_{n+1}^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x u_{n+1}^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= \int_0^x \lambda^{n+1} f(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

2. a) On a : $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{|\lambda|^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}|f(t)|\,dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \times \frac{(|\lambda| x)^n}{n!}$.

Comme la série $\sum \dfrac{|\lambda x|^n}{n!}$ converge pour tout réel x, on en déduit que la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente pour tout réel positif ou nul x.

b) Pour tout $u > 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{u}{n+2} + \frac{u^2}{(n+2)^2} + \cdots\Big) \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{1-\frac{u}{n+2}}$$

Donc si $n+2>2u$, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\leqslant 2\times\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}u_k(x)&=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\lambda^k\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)dt\\&=f(x)+\lambda\int_0^x\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\Big)f(t)dt\end{aligned}$$

d) Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}$, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}u_k(x)&=f(x)+\lambda\int_0^x\Big(\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}\Big)f(t)\,dt\\&=f(x)+\lambda\int_0^x\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt-\lambda\int_0^x\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}f(t)dt\end{aligned}$$

Or, pour n assez grand :

$\displaystyle\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{[\lambda(x-t)]^k}{k!}\Big|\leqslant\frac{2(|\lambda(x-t)|^n}{n!}$, donc :

$$\Big|\int_0^x\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}f(t)dt\Big|\leqslant 2\sup_{[0,1]}|f(t)|\times\frac{(|\lambda|x)^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)=f(x)+\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\int_0^x\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\,dt$$

Exercice 1.13.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel. Soit u et v les suites définies par :

$$u_n=\sqrt{\frac{1}{100}+\sqrt{\frac{1}{101}+\sqrt{\frac{1}{102}+\sqrt{\quad\cdots+\sqrt{\frac{1}{100+n}}}}}}.$$

$$v_n=\sqrt{\frac{1}{100}+\sqrt{\frac{1}{100}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{100}}}}.$$

avec $n+1$ symboles $\sqrt{\cdot}$, dans les deux cas.

On pose pour tout réel strictement positif a, et pour tout réel positif x,

$$f_a(x)=\sqrt{\frac{1}{a}+x}.$$

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.

2. Montrer que f_{100} admet un unique point fixe α que l'on déterminera, puis que la suite v converge vers α.

3. On admet que $u_8>1$. Montrer que u converge vers une limite β telle que : $1<\beta<1{,}01$.

Solution :

1. Pour tout $a > 0$, les fonctions f_a sont strictement croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On a :

$$u_n = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}$$

et

$$v_n = f_{100} \circ f_{100} \circ \cdots \circ f_{100}, \quad (n+1) \text{ fois}$$

Ceci permet d'affirmer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies.

2. L'équation $f_{100}(x) = x$ est équivalente à $x^2 - x - \dfrac{1}{100} = 0$. La seule solution positive de cette équation est

$$\alpha = \frac{100 + \sqrt{10400}}{200} = \frac{1 + \sqrt{1.04}}{2}$$

D'autre part, la fonction f_{100} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $v_{n+1} = f_{100}(v_n)$. La suite $(v_n)_n$ est donc monotone. Or $v_0 = 0.1$ et $v_1 = \sqrt{0.1 + \dfrac{1}{100}} > v_0$. La suite $(v_n)_n$ est donc croissante.
Enfin, $v_0 < \alpha$. Supposons que $v_n \leqslant \alpha$. Alors $v_{n+1} = f(v_n) \leqslant f(\alpha) = \alpha$.
La suite $(v_n)_n$ est ainsi croissante, majorée par α. Elle converge vers le point fixe positif de f_{100} (qui est continue), donc vers α.

3. Montrons que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.
On a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}\Big(\sqrt{\dfrac{1}{100+n+1}}\Big) \\ u_n = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}(0) \end{cases}$$

Or la fonction $f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}$ est strictement croissante (composée de $(n+1)$ fonctions strictement croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même) et comme $\sqrt{\dfrac{1}{100+n+1}} > 0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
D'autre part $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \alpha$. Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente. Elle converge vers une limite β telle que $\beta \leqslant \alpha$.
Comme on a admis que $u_8 > 1$, on a également $1 < \beta \leqslant \alpha$.
Enfin, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est concave sur $[-1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant -1$, $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $x = 0$.
Ainsi $\sqrt{1.04} < 1 + 0.02$ et $\alpha < 1 + 0.01$. Finalement, on a bien

$$1 < \beta < 1.01$$

Exercice 1.14.

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)\, dt$$

1. a) Montrer que pour tout x et tout n on a : $|I_n(x)| \leqslant 1$.
   b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

2. a) Soit $h \in \mathbb{R}$; montrer que pour tout x et tout n :
$$|I_n(x+h) - I_n(x)| \leqslant |h|.$$
   b) En déduire que la fonction I_n est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, donner pour tous réels x, h et t une majoration de

$$|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)|$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $J_n(x) = -\displaystyle\int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(tx)\,dt$.

Montrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $I_n'(x)$ en fonction de $J_n(x)$.

Solution :

1. a) Pour tout réel x, $t \mapsto (1-t^2)^n\cos(xt)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $|(1-t^2)^n\cos(xt)| \leqslant 1$. Ceci entraîne que $|I_n(x)| \leqslant 1$.

b) Pour $x \neq 0$ $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)dt = \frac{\sin x}{x}$ et $I_0(0) = 1$.

Deux intégrations par parties successives donnent pour $x \neq 0$:

$$I_1(x) = \int_0^1 (1-t^2)\cos(xt)dt = \frac{2\sin x - 2x\cos x}{x^3}$$

et $I_1(0) = \dfrac{2}{3}$.

2. Soit h réel. On peut écrire :

$$\begin{aligned}|I_n(x+h)-I_n(x)| &= \Big|\int_0^1 (1-t^2)^n\big(\cos(xt+th)-\cos(xt)\big)\,dt\Big|\\ &\leqslant \int_0^1 \big|\big(\cos(xt+th)-\cos(xt)\big)\big|\,dt\end{aligned}$$

Or

$$\big|\cos(xt+th)-\cos(xt)\big| \leqslant |th| \sup_{[xt,xt+th]} |\cos'| \leqslant |th|$$

On en déduit que :

$$|I_n(x+h)-I_n(x)| \leqslant \int_0^1 |th|\,dt = \frac{|h|}{2}$$

b) Ainsi, pour tout x, $\lim\limits_{h\to 0} I_n(x+h) = I_n(x)$, ce qui montre la continuité de I_n sur $\mathbb{R}$.

3. a) Appliquons l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction cosinus sur l'intervalle $[tx, tx+th]$. Il vient :

$$|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\sup_{[tx,tx+th]}|\cos''| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}$$

b) En utilisant le résultat précédent, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= |I_n(x+h)-I_n(x)-hJ_n(x)|\\ &= \Big|\int_0^1 (1-t^2)^n\big(\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)\big)dt\Big|\\ &\leqslant \int_0^1 |\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)|dt\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{t^2h^2}{2}dt = \frac{h^2}{6} = o(h)$$

Par conséquent :

$$\frac{I_n(x+h)-I_n(x)}{h} - J_n(x) = o(1)$$

Ceci montre que I_n est dérivable en x réel et que $I_n'(x) = J_n(x)$.

Exercice 1.15.

Soit $t \in [0,1]$. On définit la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ par récurence en posant

$$u_0(t) = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\left[t - u_n(t)^2\right]$$

1. a) Montrer que $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ pour tout entier n.

b) Prouver que la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. On va maintenant s'intéresser aux fonctions $t \mapsto u_n(t)$.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est une fonction polynomiale pour tout entier n. Déterminer son degré.

b) Au moyen d'une récurrence sur l'entier n, déterminer le signe de u_n'' sur l'intervalle $[0,1]$. Quel est le sens de variation de la fonction u_n' sur $[0,1]$? Que peut-on en déduire pour la fonction u_n sur l'intervalle $[0,1]$?

c) Que peut-on dire de la suite $(u_n'(0))_{n\geqslant 0}$?

d) Soit n un entier strictement positif et $t \in [0,1]$. Prouver que l'on a :

$$0 \leqslant u_{n+1}'(t) \leqslant \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)u_n'(t) + \frac{1}{2}$$

En déduire que la suite $(u_n'(t))_{n\geqslant 0}$ est bornée pour $t \in]0,1]$.

Solution :

1. a) Montrons cette assertion par récurrence sur n. Elle est évidente pour $n = 0$. Supposons que pour un certain rang n, $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\big(t - u_n(t)^2\big)\\ &= \big(\sqrt{t} - u_n(t)\big)\Big(1 - \frac{\sqrt{t}+u_n(t)}{2}\Big)\end{aligned}$$

Le premier facteur est positif, ainsi que le second, car l'hypothèse de récurrence donne : $\dfrac{\sqrt{t}+u_n(t)}{2} \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1$, donc $u_{n+1}(t) \leqslant \sqrt{t}$.
D'autre part, $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t} \implies t - u_n(t)^2 \geqslant 0$ et $u_{n+1}(t) \geqslant 0$.
On conclut par le principe de récurrence.

b) On a vu en fait à la fin de la question précédente que $u_{n+1}(t) \geqslant u_n(t)$ et la suite $\big(u_n(t)\big)_n$ est croissante.

c) La suite $\big(u_n(t)\big)_n$ est croissante et majorée. Elle converge vers une limite $\ell(t)$ positive qui vérifie $\ell(t) + \frac{1}{2}\big(t - \ell(t)^2\big) = \ell(t)$, soit $\ell(t) = \sqrt{t}$.

2. a) La fonction u_0 est polynomiale de degré 0, $u_1 : t \mapsto \dfrac{1}{2}t$ est polynomiale de degré $1 = 2^0$, $u_2 : t \mapsto t - \dfrac{1}{8}t^2$ est polynomiale de degré $2 = 2^1$ ... et si on suppose que pour un rang $n \geqslant 1$, u_n est polynomiale de degré 2^{n-1}, alors la relation de récurrence montre que u_{n+1} est polynomiale de degré 2^n.

b) Comme u_n est polynomiale, elle est de classe C^∞. En dérivant la relation de récurrence, il vient :

$$u'_{n+1}(t) = u'_n(t) + \frac{1}{2}\big(1 - 2u'_n(t)u_n(t)\big) = u'_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) + \frac{1}{2}$$

En dérivant une seconde fois, il vient :

$$u''_{n+1}(t) = u''_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) - \big(u'_n(t)\big)^2$$

On a $u''_2(t) = -\dfrac{1}{4}$.

Comme $u_n(t) \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1$, pour $t \in [0,1]$, on voit que si on suppose $u''_n(t) \leqslant 0$ pour $t \in [0,1]$ et pour un certain $n \geqslant 2$, alors $u''_{n+1}(t) \leqslant 0$ pour $t \in [0,1]$. On conclut par le principe de récurrence.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction u'_n est décroissante sur $[0,1]$.

c) Une récurrence élémentaire montre que $u_n(0) = 0$, donc :

$$u'_{n+1}(0) = u'_n(0)\big(1 - u_n(0)\big) + \frac{1}{2} = u'_n(0) + \frac{1}{2}$$

La suite $\big(u'_n(0)\big)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et puisque $u'_0(0) = 0$:

$$u'_n(0) = \frac{n}{2}.$$

La suite $\big(u'_n(0)\big)_n$ n'est donc pas bornée.

d) On a vu que $u'_{n+1}(t) = u'_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) + \dfrac{1}{2}$

Comme $u_n(t) \in [0, \sqrt{t}] \subseteq [0,1]$, une récurrence immédiate montre que $u'_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, pour $n \geqslant 1, u_n(t) \geqslant u_1(t) = \dfrac{t}{2}$, donc pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u'_{n+1}(t) \leqslant \big(1 - u_1(t)\big)u'_n(t) + \frac{1}{2} = \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)u'_n(t) + \frac{1}{2}$$

Le point fixe de la récurrence arithmético-géométrique $w_{n+1} = \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)w_n + \dfrac{1}{2}$ vaut $\dfrac{1}{t}$, donc on écrit la relation précédente sous la forme :

$$\big(u'_{n+1}(t) - \tfrac{1}{t}\big) \leqslant \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)\big(u'_n(t) - \tfrac{1}{t}\big)$$

D'où l'on déduit, puisque $1 - \dfrac{t}{2}$ est positif :

$$0 \leqslant u'_{n+1}(t) \leqslant \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)^n\big(u'_1(t) - \tfrac{1}{t}\big) + \tfrac{1}{t} = \big(1 - \tfrac{t}{2}\big)^n\big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{t}\big) + \tfrac{1}{t} \leqslant \tfrac{1}{t}$$

La suite $\big(u'_n(t)\big)_n$ est donc bornée pour $t \in]0,1]$.

Exercice 1.16.

Pour tout n entier naturel tel que $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n : z \mapsto nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \cdots - z - 1$$

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C} : P_n(z) = 0 \implies P_n(|z|) \leqslant 0$.

2. Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto (x-1)P_n(x)$ (on commencera par simplifier l'expression de $f(x)$).

En déduire que si $P_n(z)=0$, alors $|z|\leqslant 1$.

3. Soit z un nombre complexe tel que $|z|\leqslant 1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que $|(z-1)P_n(z)-1|\leqslant \big(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^n(2n-\sqrt{n}+1)$.

b) Montrer que pour $x>-1, \ln(1+x)\leqslant x$; en déduire que pour $n\geqslant 2$:

$$\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n\leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

c) Etudier les variations de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}(2x^2-x+1), x\geqslant\sqrt{2}$.

En déduire que pour $n\geqslant 2$, $\big(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^n(2n-\sqrt{n}+1)<1$.

4. En déduire que si z est une solution complexe de l'équation $P_n(z)=0$, alors :

$$1-\frac{1}{\sqrt{n}}<|z|\leqslant 1.$$

Solution :

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} P_n(z)=0 &\implies nz^n=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1\\ &\implies n|z|^n\leqslant |z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\cdots+|z|+1\\ &\implies n|z|^n-|z|^{n-1}-|z|^{n-2}-\cdots-|z|-1\leqslant 0\\ &\implies P_n(|z|)\leqslant 0\end{aligned}$$

2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$(z-1)P_n(z)=nz^{n+1}-(n+1)z^n+1$$

On a donc, pour tout x réel, $f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$. Alors :

$$f'(x)=n(n+1)(x-1)x^{n-1}$$

La fonction f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ en $x=1$, minimum qui vaut $f(1)=0$. Ainsi, en particulier $x>1 \implies f(x)>0$.

Soi $z\in\mathbb{C}$, le résultat précédent et la contraposée du résultat de la question 1. donnent :

$$|z|>1 \implies (|z|-1)P_n(|z|)>0 \implies P_n(|z|)>0 \implies P_n(z)\neq 0$$

Donc, encore par contraposée, si $P_n(z)=0$ alors $|z|\leqslant 1$.

3. a) Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leqslant 1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a : $(z-1)P_n(z)-1=nz^{n+1}-(n+1)z^n=z^n(nz-n-1)$, donc :

$$|(z-1)P_n(z)-1|\leqslant |z|^n(n|z|+n+1)$$

et

$$|z|\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{n}} \implies \begin{cases} |z|^n\leqslant \big(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^n\\ n|z|+n+1\leqslant n-\sqrt{n}+n+1\end{cases}$$

donc :

$$|(z-1)P_n(z)-1|\leqslant \big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n(2n-\sqrt{n}+1)$$

b) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$, donc pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ (on peut auusi étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ ...). Aussi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$n \ln\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big) \leqslant n \times \frac{-1}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}$$

et, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

c) La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(2x^2 - x + 1)$ est de classe C^∞. On a :

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)(-2x+1)$$

Ceci donne les variations de h sur $[\sqrt{2},+\infty[$. La fonction h atteint son maximum en $x = 2$ et $h(2) < 1$. Ainsi, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a $h(x) < 1$. Donc, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P_n(z) = 0$. Supposons que $|z| \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $P_n(z) = 0$, on a $|(z-1)P_n(z) - 1| = 1$. Or, par les questions précédentes :

$$|(z-1)P_n(z) - 1| \leqslant \big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$$

C'est une contradiction. Donc, pour tout $n \geqslant 2$, $|z| > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la conclusion.

Exercice 1.17.

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et de dérivée bornée sur $]0,1[$.

1. Étudier la convergence de la *suite* de terme général $\varphi_n = f\big(\frac{1}{n}\big)\cdot$
On commencera par montrer que la série de terme général $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ $(n \geqslant 3)$ *converge absolument.*

2. a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ décroissante et convergeant vers 0.

Montrer (de la même manière que dans le cas particulier précédent) que la suite $\big(f(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0 (on ne la suppose pas décroissante).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$.

Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0.

En déduire que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

On considèrera la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = u_n$ *et* $w_{2n+1} = v_n$.

On note λ la limite commune des suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0.

3. a) On suppose que, quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(t)$ ne tend pas vers λ.

Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $u \in]0, 1/n[$ tel que $|f(u) - \lambda| \geqslant \varepsilon$?

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un tel réel u que l'on note u_n.

Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Déduire de ce résultat que f est prolongeable par continuité à droite en 0, puis à gauche en 1.

Solution :

1. Les hypothèses de l'exercice et le théorème des accroissements finis permettent d'affirmer qu'il existe une constante $C = \sup\limits_{t\in\,]0,1]} |f'(t)|$ telle que :

$$\big|f\big(\frac{1}{n+1}\big) - f\big(\frac{1}{n}\big)\big| \leqslant C\big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\big| = \frac{C}{n(n+1)}$$

Ceci montre que la série $\sum \varphi_{n+1} - \varphi_n$ est convergente.

Ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N-1} \varphi_{n+1} - \varphi_n$ existe, c'est-à-dire que $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi_N$ existe.

2. a) On reprend la démonstration précédente :

$$\big|f(t_{n+1}) - f(t_n)\big| \leqslant C|t_{n+1} - t_n| = C(t_n - t_{n+1})$$

Or la série $\sum(t_n - t_{n+1})$ converge puisque $\sum\limits_{n=0}^{N-1}(t_n - t_{n+1}) = t_0 - t_N \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} t_0$.
Donc la série $\sum \big|f(t_{n+1}) - f(t_n)\big|$ converge également, ce qui montre que la série $\sum \big(f(t_{n+1}) - f(t_n)\big)$ converge et que la suite $(f(t_n))_n$ est elle même convergente.

b) La suite $(t_n)_n$ est décroissante, puisque $t_{n+1} = \min(t_n, u_{n+1}) \leqslant t_n$. Elle tend vers 0 puisque $0 \leqslant t_n \leqslant u_n \longrightarrow 0$.

On en conclut que la suite $\big(f(t_n)\big)_n$ converge ; soit ℓ sa limite. Alors :

$$\begin{aligned}|f(u_n) - \ell| &\leqslant |f(u_n) - f(t_n)| + |f(t_n) - \ell| \leqslant C|u_n - t_n| + |f(t_n) - \ell| \\ &\leqslant Cu_n + |f(t_n) - \ell|\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

c) Soit $(w_n)_n$ la suite définie par $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. Comme les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers 0, la suite $(w_n)_n$ tend également vers 0. La question précédente montre que la suite $(f(w_n))_n$ tend vers une limite λ et donc que les deux suites extraites $\big(f(w_{2n})\big)_n$ et $\big(f(w_{2n+1})\big)_n$ tendent également vers λ.

3. a) On traduit l'hypothèse de la question : $f(t)$ ne tend pas vers λ lorsque t tend vers 0^+ :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, \delta > 0, \exists\, u \in]0, \delta] \ \text{ tel que } |f(u) - \lambda| \geqslant \varepsilon$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{n}$, et en considérant un tel u que l'on note u_n, on obtient le résultat demandé.

Comme $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $|f(u_n) - \lambda| \geqslant \varepsilon$ montre que la suite $\big(f(u_n)\big)_n$ ne converge pas vers λ.

b) La question précédente conduit à une contradiction. Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lambda$: la fonction f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = \lambda$.

En appliquant ce résultat à la fonction $g(t) = f(1-t)$ qui est dérivable et de dérivée bornée sur $]0,1[$, on montre que g est prolongeable par continuité en 0 et donc que f est prolongeable par continuité à gauche en 1.

Exercice 1.18.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$\text{il existe un réel } p > 0, \text{ tel que } \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = p$$

On cherche à déterminer un équivalent de la suite de terme général :

$$U_n = f(1) + \cdots + f(n).$$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant x_0, f'(x) > 0$. En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [n, n+1], p - \varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant p + \varepsilon_n$$

3. En intégrant la relation précédente, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [n, n+1], f(n)\mathrm{e}^{(p-\varepsilon_n)(x-n)} \leqslant f(x) \leqslant f(n)\mathrm{e}^{(p+\varepsilon_n)(x-n)}$$

puis que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = f(n) \text{ et } v_n = \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

sont équivalentes.

En utilisant le résultat de la première question, en déduire un équivalent de la suite de terme général U_n.

Solution :

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = p > 0$ et comme $f(x) > 0$, il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0, f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$ et $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ sur cet intervalle. Donc :

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt \geqslant \int_1^{x_0} f(t)\,dt + f(x_0)(x - x_0)$$

et, par minoration : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = +\infty$.

2. Soit $\varepsilon_n = \max\limits_{t\in[n,n+1]} \left|\dfrac{f'(t)}{f(t)} - p\right|$, on a :

$$\forall\, x \in [n, n+1], -\varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} - p \leqslant \varepsilon_n,\ i.e.\ p - \varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant p + \varepsilon_n$$

et, par définition de la limite de $\dfrac{f'}{f}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

3. En intégrant la relation précédente entre n et x, pour $x \in [n, n+1]$, il vient :

$$(p - \varepsilon_n)(x - n) \leqslant \ln\big(f(x)\big) - \ln\big(f(n)\big) \leqslant (p + \varepsilon_n)(x - n)$$

En prenant l'exponentielle (qui est une fonction croissante), on obtient la première inégalité :

$$\forall\, x \in [n, n+1], f(n)\, \mathrm{e}^{(p-\varepsilon_n)(x-n)} \leqslant f(x) \leqslant f(n)\, \mathrm{e}^{(p+\varepsilon_n)(x-n)}$$

et, en intégrant ces inégalités entre n et $n+1$:

$$f(n)\, \frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leqslant f(n)\, \frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

4. On peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \times \frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \times \frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

On sait que la série $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$(résultat de la première question et relation de Chasles). Il en est donc de même pour la série $\sum u_n$.
Montrons que les sommes partielles

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n v_k = \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \int_1^{n+1} f(x)\, dx$$

sont équivalentes, ce qui terminera l'exercice.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on peut écrire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \geqslant n_0, v_k(1 - \varepsilon) \leqslant u_k \leqslant v_k(1 + \varepsilon)$$

et en sommant depuis le rang $n_0 + 1$ jusqu'au rang $n > n_0$:

$$(V_n - V_{n_0})(1 - \varepsilon) \leqslant U_n - U_{n_0} \leqslant (V_n - V_{n_0})(1 + \varepsilon)$$

Soit :

$$\frac{(V_n - V_{n_0})(1 - \varepsilon) + U_{n_0}}{V_n} \leqslant \frac{U_n}{V_n} \leqslant \frac{(V_n - V_{n_0})(1 + \varepsilon) + U_{n_0}}{V_n}$$

Le majorant a pour limite $1 + \varepsilon$ et le minorant a pour limite $1 - \varepsilon$ lorsque n tend vers l'infini (puisque V_n tend vers $+\infty$).

Donc pour n assez grand, on a $1 - 2\varepsilon \leqslant \dfrac{U_n}{V_n} \leqslant 1 + 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$ et donne :

$$U_n \sim \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \int_1^{n+1} f(x)\, dx$$

Exercice 1.19.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Dans tout l'exercice on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note ${}^t x$ le transposé de x, élément de $\mathbb{R}^n$. Ainsi si x et y sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, ${}^t xy$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ donné, et S une matrice symétrique réelle d'ordre n. On définit la fonction m sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m(x) = {}^t ax + \frac{1}{2}\,{}^t xSx$$

1. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t xSx \geqslant 0$. On suppose également que a appartient à l'image de S.

Montrer que la fonction m admet sur $\mathbb{R}^n$ un minimum global (on pourra calculer pour $y \in \mathbb{R}^n$, $m(y + x_0) - m(x_0)$ pour x_0 tel que $S(x_0) = -a$).

2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le gradient $\nabla m(x)$ de m en x.

3. En déduire que si m possède un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, alors a appartient à $\operatorname{Im} S$ et S vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t xSx \geqslant 0$.

4. On suppose dans cette question que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $x \neq 0$, on a ${}^t xSx > 0$. Montrer qu'il existe un unique vecteur x^* en lequel m admet un minimum global strict.

5. Dans cette question $n = 2$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

À quelle condition sur α cette matrice vérifie-t-elle pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t xSx \geqslant 0$?

On suppose cette condition vérifiée. Déterminer un vecteur a de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} m(x) = -\infty$.

Solution :

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $S(x_0) = -a$. On a, pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} m(x_0 + y) - m(x_0) &= a^T(x_0 + y) + \frac{1}{2}(x_0 + y)^T S(x_0 + y) - a^T x - \frac{1}{2}x_0^T S x_0 \\ &= a^T y + \frac{1}{2}x_0^T S y + \frac{1}{2}y^T S x_0 + \frac{1}{2}y^T S y \end{aligned}$$

Comme $S(x_0) = -a$ et $x_0^T S y = (Sx_0)^T y$, il vient :

$$m(x_0 + y) - m(x_0) = a^T y - \frac{1}{2}a^T y - \frac{1}{2}a^T y + \frac{1}{2}y^T S y = \frac{1}{2}y^T S y \geqslant 0$$

Or tout vecteur x de E est de la forme $x = x_0 + y$; donc, pour tout x de E, $m(x) - m(x_0) \geqslant 0$.

2. On a pour tout $h \in E$:

$$m(x + h) - m(x) = a^T h + h^T S x + \frac{1}{2}h^T S h$$

L'application $h \longmapsto a^T h + h^T S x$ est linéaire et

$$||\frac{1}{2}h^T S h|| \leqslant \frac{1}{2}||S||.||h||^2 = o(||h||)$$

Donc, par définition :

$$\nabla m(x) = a^T h + h^T S x = h^T\big(a + S(x)\big)$$

3. Les points critiques sont les points x de E tels que pour tout $h \in E$, on ait : $h^T\big(a + S(x)\big) = 0$, donc tels que $S(x) = -a$.

Si m possède un minimum global sur E, alors $S(x) = -a$ et $a \in \mathrm{Im}(S)$. On reprend la première question pour montrer qu'alors, pour tout $y \in E$, $\frac{1}{2}y^T Sy \geqslant 0$.

4. Si pour tout x de E non nul, $\frac{1}{2}x^T Sx > 0$, alors la matrice S est inversible et il existe un unique vecteur x_0 tel que $S(x_0) = -a$. En ce point, m admet un minimum global.

5. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres λ, μ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda\mu = 1 - \alpha^2 \end{cases}$$

On a, pour tout x de E, $x^T Sx \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$. Comme $\lambda\mu = 1 - \alpha^2$, cela entraîne que $|\alpha| \leqslant 1$

• Si $|\alpha| \neq 1$, on a pour tout x de E, $x^T Sx > 0$ et on conclut par la question 4.

• Si $\alpha = 1$, alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Choisissons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(S)$. Si $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $m(x) = u + \frac{1}{2}(u+v)^2$.

Il suffit de prendre $x = \begin{pmatrix} -w \\ w \end{pmatrix}$ et $m(x) = -w \underset{w \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

• Si $\alpha = -1$, alors $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Choisissons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(S)$. Si $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $m(x) = u + \frac{1}{2}(u-v)^2$.

Il suffit de prendre $x = \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}$ et $m(x) = w \underset{w \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 1.20.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction convexe. On rappelle que f est une fonction convexe si :

$$\forall (\lambda, x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Soit f une fonction convexe.
On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(y) \geqslant f(x) + \langle h, y - x\rangle \qquad (1)$$

puis en déduire des propriétés sur les extremums de f.

1. Soient x et y fixés dans $\mathbb{R}^n$ et soit ψ l'application définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles par :

$$\psi : t \longmapsto f(ty + (1-t)x)$$

a) Montrer que ψ est convexe sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\psi(1) - \psi(0) \geqslant \psi'(0)$ puis que $h = \nabla f(x)$ vérifie la propriété (1).

2. Réciproquement, on suppose que $h \in \mathbb{R}^n$ vérifie la propriété (1) pour un certain x de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la dérivée de f en x dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x), u \rangle \geqslant \langle h, u \rangle$$

En déduire que $h = \nabla f(x)$.

3. Montrer que $\nabla f(x) = 0$ si et seulement si f présente un minimum global en x.

4. On suppose que f possède un maximum global en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1. a) On a, pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f\big((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y + (1 - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)x)\big)\\ &= f((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y + (\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)x)\\ &= f(\lambda(t_1 y + (1-t_1)x) + (1-\lambda)(t_2 y + (1-t_2)x))\\ &\leqslant \lambda f(t_1 y + (1-t_1)x) + (1-\lambda) f(t_2 y + (1-t_2)x)\\ &\leqslant \lambda\psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2)\end{aligned}$$

Donc ψ est une fonction convexe sur $[0,1]$.

b) Le graphe d'une fonction convexe étant au-dessus de ses tangentes, on a bien $\psi(1) - \psi(0) \geqslant \psi'(0)$, ce qui donne, par la règle de dérivation d'une composée :

$$f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

2. Soit $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. La relation précédente appliquée à $y = x + tu$ s'écrit :

$$f(x+tu) - f(x) \geqslant t\langle h, u \rangle$$

ou

$$\frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \geqslant \langle h, u \rangle$$

Il reste à faire tendre t vers 0, pour obtenir

$$\langle \nabla f(x), u \rangle \geqslant \langle h, u \rangle$$

ou

$$\langle \nabla f(x) - h, u \rangle \geqslant 0$$

En appliquant cette relation avec $-u$, il vient $\langle \nabla f(x) - h, u \rangle = 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, donc $\nabla f(x) = h$.

3. Si $\nabla f(x) = 0$, la relation démontrée dans la première question montre que f présente en x un minimum global. La réciproque est vérifiée dès que f est de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

4. Si f admet un maximum global en x_0, alors $\nabla f(x_0) = 0$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0) \geqslant f(y) \geqslant f(x_0)$$

Donc f est une fonction constante.