# 1

# ANALYSE

---

**Exercice 1.1.**

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\, dt$ converge.
On note $f(x)$ sa valeur.
Montrer de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$ converge.
Montrer enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ converge et préciser sa valeur.

2. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :
$$\big|\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos\big(2xt\big) + 2ht\sin\big(2xt\big)\big| \leqslant 2h^2t^2.$$
En déduire que :
$$\Big|f(x+h) - f(x) + 2h\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt\Big| \leqslant 2h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt.$$

3. Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f'(x) = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt.$$

4. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f'(x) = -2xf(x).$$
En déduire que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer la valeur de cette constante (*on recherchera pour cela la valeur de* $f$ *en* $0$).
En conclusion, quelle est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $f(x)$ ?

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos^2(xt)\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin^2(xt)\, dt$ convergent et calculer leurs valeurs respectives.

---

**Solution :**

1. Soit $x$ réel. Pour tout $t$ réel, on a :

$$0 \leqslant |\mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ converge [considérer une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$], l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\, dt$ est absolument convergente, donc convergente. On peut ajouter que pour tout $x$ réel : $|f(x)| \leqslant \sqrt{\pi}$.

De même, pour tout $t$ positif, $0 \leqslant |t\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ converge (son calcul est même banal). Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$ converge (absolument) et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$ converge vers la même valeur, puisque son intégrande est paire.

On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$ converge.

On peut ajouter que $\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt\right| \leqslant 2\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\, dt = 1$.

2. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Appliquons l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction cosinus à l'ordre 2 sur l'intervalle d'extrémités $2xt, 2(x+h)t$. On obtient pour tout $t$ réel :

$$\big|\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos\big(2xt\big) + 2ht\sin\big(2xt\big)\big| \leqslant 2h^2t^2$$

Comme les intégrales en jeu sont toutes absolument convergentes, on en déduit immédiatement que :

$$\big|f(x+h) - f(x) + 2h\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt\big| \leqslant 2h^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

3. Il suffit de diviser par $h$, puis de faire tendre $h$ vers 0 pour obtenir que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt.$$

4. Remarquons que pour des raisons de parité, pour tout $x$ réel :

$$f(x) = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\, dt, \quad f'(x) = -4\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$$

Soit $x$ réel. Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, les conditions d'application du théorème d'intégration par parties sont réunies. Aussi :

$$2\int_0^u -2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt = \Big[2\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big]_0^u - 4x\int_0^u \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$$

En faisant tendre $u$ vers l'infini, il vient, pour tout $x$ réel, $f'(x) = -2xf(x)$ ou $\mathrm{e}^{x^2}(f'(x) + 2xf(x)) = 0$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Sa valeur est $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Ainsi, pour tout $x$ réel : $f(x) = \sqrt{\pi}.\mathrm{e}^{-x^2}$

5. Soit $x$ réel.

- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$, converge absolument et est nulle puisque son intégrande est impaire.
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos^2(xt)\,dt$ converge d'après les résultats précédents puisque pour tout $t$ réel $\cos^2(xt) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2xt))$ et elle vaut :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+\mathrm{e}^{-x^2})$$

- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin^2(xt)\,dt$ converge d'après les résultats précédents et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}(1-\cos^2(xt))\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-x^2}).$$

---

**Exercice 1.2.**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \sqrt[3]{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et déterminer sa limite.

3. Montrer que $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$ et $u_{n+1} - u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{3u_n}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ?

4. Écrire une fonction Pascal de deux variables $n$ et $a$ permettant de calculer $u_n$ lorsque $u_0 = a$.

**Solution :**

1. On a $u_{n+1}^3 = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n^3 + u_n$. Par suite, puisque l'extraction d'une racine cubique a un sens sur $\mathbb{R}$ :
$$u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + u_n}$$

2. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n$, $u_n > 0$. Cela entraîne que pour tout $n$, $u_{n+1}^3 > u_n^3$, donc que $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Supposons qu'elle soit majorée ; dans ce cas, elle converge vers une limite $\ell$ vérifiant par continuité $\ell^3 = \ell^3 + \ell$, soit $\ell = 0$, ce qui est impossible. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc pas majorée et, étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

3. $\star$ On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{u_n^2}} \underset{(+\infty)}{\sim} 1$, *i.e.* $u_{n+1} \sim u_n$.

$\star$ De plus, comme au voisinage de 0 : $(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u)$ :
$$u_{n+1} - u_n = u_n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{u_n^2}} - 1 \right) \underset{(+\infty)}{\sim} u_n \times \frac{1}{3u_n^2} = \frac{1}{3u_n}$$

$\star$ Ainsi : $\dfrac{1}{u_n} \sim 3(u_{n+1} - u_n)$.

Or par télescopage : $\sum_{n=0}^{N} 3(u_{n+1} - u_n) = 3(u_{N+1} - u_0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par application de la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs ou nuls, la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ en résulte.

4. Voici une fonction parmi d'autres possibles
```
function u(n :integer ; a :real) :real
var v :real ;
Begin
v :=a ;
for k :=1 to n do v :=exp(1/3*v*(v*v+1)) ;
u :=v
End ;
```

---

**Exercice 1.3.**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$.

1. a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Rappeler les valeurs de $f(0)$ et de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que : $\forall\, x > 0, x f(x) < \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

b) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et la calculer.

3. a) On pose $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$. Calculer $I(a,b)$ en fonction de $f$, $a$ et $b$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$.

4. On pose, pour $x$ réel, $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$.

Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} g(x)dx$ converge et la calculer.

---

**Solution :**

1. a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}dt.$
Sous cette forme, il est clair que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

b) $f(0) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2\pi}$ (*cf.* la loi normale centrée réduite).

2. a ) Pour $x > 0$ :
$$xf(x) = \int_x^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-t^2/2}dt < \int_x^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

b) Pour $A > 0$ :
$$\int_0^A f(x)\,dx = \big[xf(x)\big]_0^A - \int_0^A xf'(x)\,dx = Af(A) + \int_0^A x.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$
Ainsi : $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx = Af(A) - \mathrm{e}^{-A^2/2} + 1$. Or $0 \leqslant Af(A) \leqslant \mathrm{e}^{-A^2/2}$ et donc, par passage à la limite :
$$I \text{ converge et } I = 1.$$

3. a) On a $2u(1-u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2u-1)^2$ ; on effectue alors le changement de variable $2u - 1 = t$ et :
$$I(a,b) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\int_{2a-1}^{2b-1} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\big[f(2a-1) - f(2b-1)\big]$$

b) Ici, $a = \frac{1}{2}$ et on fait tendre $b$ vers $+\infty$ : $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}\,du = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{4}$

4. On a $g(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}f(2x-1)$ et pour $A > \dfrac{1}{2}$ :

$$\int_{1/2}^{A} g(x)\,dx = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\int_{1/2}^{A} f(2x-1)\,dx = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}\int_{0}^{2A-1} f(y)\,dy$$

et, par passage à la limite :

$$J \text{ converge et } J = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}$$

---

**Exercice 1.4.**

1. a) Déterminer l'ensemble $I$ des réels $x$ pour lesquels la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k x^k$ converge.

b) Pour tout $x \in I$, calculer $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k x^k$.

Calculer $R_n(x)$ et montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n(x)$ converge.

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)$.

2. Soit $(u_n)$ une suite réelle positive telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k$ en fonction de $n$ et $R_n$.

b) Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} n u_n$ converge.

3. a) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} n u_n$ converge. Que vaut $\lim_{n\to+\infty}(n+1)R_n$ ?

b) En déduire que les séries $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n u_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

3. Application. Dans cette question $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

a) Pour quelles valeurs de $x$ la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est-elle convergente ?

On note alors : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^x}$

Pour quelles valeurs de $x$ la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n(x)$ est-elle convergente ? Exprimer sa somme en fonction de $\zeta(x-1)$.

---

**Solution :**

1. a) La série proposée est une série géométrique de raison $-x$, qui converge si et seulement si $|x| < 1$.

b) Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

c) La série définissant $R_n(x)$ est une série géométrique de raison $-x$, commençant par $(-1)^{n+1}x^{n+1}$.
Donc, pour tout $|x| < 1$, il vient :

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la série de terme général $R_n(x)$ est convergente pour tout $x$ tel que $|x| < 1$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

2. a) Notons $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1, R_k = S - \sum\limits_{j=1}^{k} u_j$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_k &= \sum_{k=0}^{n} \Big( S - \sum_{j=1}^{k} u_j \Big) = (n+1)S - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{k} u_j \\
&= (n+1)S - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} u_j = (n+1)S - \sum_{j=1}^{n} (n+1-j) u_j \\
\sum_{k=0}^{n} R_k &= (n+1)S - (n+1) \sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} j u_j \\
&= (n+1)R_n + \sum_{j=1}^{n} j u_j
\end{aligned}$$

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, la suite $(R_n)$ est décroissante et tend vers 0 car la série $\sum\limits_n u_n$ converge.
Supposons que la série $\sum\limits_n R_n$ converge. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$ : $\sum\limits_{k=n}^{2n} R_k < \frac{\varepsilon}{2}$
Donc, par décroissance :

$$\forall\, n \geqslant N, |nR_{2n}| \leqslant \Big| \sum_{k=n}^{2n} R_k \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n+\infty} 2nR_{2n} = 0$. Enfin :

$$(2n+1)R_{2n+1} \leqslant 2nR_{2n} + R_{2n+1} \implies \lim_{n+\infty} (2n+1)R_{2n+1} = 0$$

Ainsi la suite $(nR_n)$ tend vers 0, ce qui entraîne que la série $\sum\limits_j ju_j$ converge.

3. a) Si la série $\sum\limits_n nu_n$ converge, alors :

$$(n+1)R_n = (n+1)\sum_{j=n+1}^{\infty} u_j \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} j u_j$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini.

b) On déduit des deux dernières questions que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} nu_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

4. a) La série de terme général $u_n(x)$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$.

b) Par la question 3, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nu_n(x)$ converge, donc si et seulement si $x > 2$.
Enfin,dans ce cas, sa somme vaut évidemment $\zeta(x-1)$.

---

**Exercice 1.5.**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1, u_n \in ]-1,1[$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1+u_k)$.

1. a) On suppose dans cette question que $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite $(p_n)$ a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1[$. Montrer que la suite $(p_n)$ admet une limite finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c) **Application**. Déterminer la limite de la suite $(p_n)$ lorsque $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$

2. a) On suppose dans cette question que $u_1 = 0$ et $u_n = -\dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$. La suite $(p_n)$ a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que $u_n \in ]-1,0[$, pour tout $n \geqslant 1$. Que peut-on dire de la suite $(p_n)$ si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge ?

c) Montrer que la suite $(p_n)$ admet une limite $\lambda > 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

d) **Application**. Déterminer la limite de la suite $(p_n)$ lorsque l'on a $u_1 = 0$ et $u_n = -\dfrac{2}{n(n+1)}$, pour $n \geqslant 2$.

3. On suppose maintenant que $u_n$ est de signe quelconque et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente. Que peut-on conclure sur la suite $(p_n)$ ?

---

**Solution :**

1. a) On a pour tout $k, 1+u_k = \frac{k+1}{k}$. Donc par télescopage :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$$

La suite $(p_n)_n$ tend vers l'infini.

b) On sait que pour tout $k, 1+u_k \geqslant 1$. Aussi $p_n \geqslant 1$ et :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$$

Ainsi la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la suite $(\ln p_n)_n$ admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum\limits_k \ln(1+u_k)$ converge.

- si $u_n$ ne tend pas vers 0, alors $\ln(1+u_n)$ ne tend pas vers 0, et la série $\sum\limits_k \ln(1+u_k)$ diverge grossièrement.

- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et, par la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs, la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la série $\sum\limits_n u_n$ converge.

c) Comme la série $\sum\limits_n \frac{1}{n(n+2)}$ converge (règle de Riemann), on sait que la suite $(p_n)_n$ admet une limite. Or, en revenant aux sommes partielles, on a :

$$\begin{aligned}
\ln p_N &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right] \\
&= 2\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) \\
&= 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln n - \sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) = \ln 2 + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N = 2$.

2. a) Comme dans la question précédente pour tout $k, 1+u_k = \frac{k-1}{k}$. Donc

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) On sait que pour tout $k, 1+u_k \geqslant 0$. Aussi

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$$

Ainsi la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la suite $(\ln p_n)_n$ admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum\limits_k \ln(1+u_k)$ converge.

On suppose que la série $\sum\limits_n u_n$ diverge.

- si $u_n$ ne tend pas vers 0, alors $\ln(1+u_n)$ non plus et la série à termes négatifs $\sum\limits_k \ln(1+u_k)$ diverge vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$,
- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et la série à termes négatifs $\sum\limits_k \ln(1+u_k)$ diverge vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$.

c) On vient de voir que si la série $\sum\limits_n u_n$ diverge, alors la suite $(p_n)_n$ ne tend pas vers une limite $\lambda > 0$.

Réciproquement si $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lambda > 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \ln p_n = \ln\lambda$. Ceci entraîne que la série $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ converge et donc que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+u_n) = 0$. Ainsi on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$, ce qui entraîne que la série $\sum\limits_n u_n$ converge.

d) On a $1+u_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$. Ainsi :

$$p_n = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\prod\limits_{k=2}^{n}(k+2)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)} = \frac{1}{n}\times\frac{n+2}{3}$$

dont la limite est $1/3$.

3. Si la série $\sum |u_n|$ converge, son terme général tend vers 0. Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a, à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leqslant |u_n|$.

Ainsi la série $\sum\limits_n \ln(1+u_n)$ converge, ce qui entraîne la convergence de la suite $(p_n)_n$.

---

**Exercice 1.6.**

Soit $a$ un réel positif ou nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

On note $u$ l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui à tout réel $a$ associe $u(a)$.

2. Montrer que $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que l'application $u$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Calculer $u(0)$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} u(a)$.

5. Déterminer l'application réciproque de $u$.

6. Montrer que $u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

7. Montrer que $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'elle est également dérivable à droite en 0. Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $u'(a)$, ainsi que la valeur de la dérivée à droite en 0.

8. Esquisser l'allure de la courbe représentant $u$.

---

**Solution :**

1. La fonction $x \mapsto P_a(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P_a'(x) = 3x^2 + a$. Pour tout $a$, la fonction $P_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} P_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_a(x) = +\infty$, $P_a$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même ; 0 a donc un unique antécédent que l'on note $u(a)$.

2. Comme $P_a$ est une fonction strictement croissante et que $P_a(0) = -1$, on a $u(a) > 0$, donc $u$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Soit $0 \leqslant a < b$. On a :

$$\begin{aligned} P_a(u(b)) &= u(b)^3 + au(b) - 1 = u(b)^3 + bu(b) - 1 + (a-b)u(b) \\ &= (a-b)u(b) < 0. \end{aligned}$$

Or, $P_a$ est une fonction strictement croissante : on a donc $u(b) < u(a)$ et $u$ est strictement décroissante.

4. $u(0)$ est la racine positive de l'équation $P_0(x) = x^3 - 1 = 0$ donc $u(0) = 1$. Par ailleurs $au(a) = 1 - u(a)^3 \leqslant 1$ ; donc $0 < u(a) \leqslant \dfrac{1}{a}$, ce qui entraîne :

$$\lim_{a \to +\infty} u(a) = 0.$$

5. On sait que $u(a) \neq 0$ (on a même $u(a) \geqslant 1$). La relation définissant $u(a)$ permet donc d'écrire :

$$a = \frac{1 - u(a)^3}{u(a)}$$

Ainsi l'application réciproque de $u$ sur $[1, +\infty[$ est $u^{-1} : t \mapsto \dfrac{1-t^3}{t}$.

6. La fonction $u^{-1}$ est clairement continue sur $[1, +\infty[$, donc $u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, la continuité en 0 s'entendant à droite.

7. La fonction $u^{-1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$(u^{-1})'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t = -\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

Cette dérivée n'étant jamais nulle, $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (la dérivée en 0 s'entendant à droite) et :

$$\forall\, a \geqslant 0, u'(a) = \frac{1}{(u^{-1})'(u(a))} = -\frac{u(a)^2}{1 + 2u(a)^3}$$

et comme $u(a)^3 = 1 - au(a)$, il vient :

$$\forall\, a \geqslant 0, u'(a) = -\frac{u(a)^2}{3 - 2au(a)}$$

En particulier la dérivée en 0 à droite de $u$ vaut : $u'(0) = -\frac{1}{3}$.

8. L'allure de la courbe représentant $u$ se déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle de $u^{-1}$ dont le tracé est élémentaire.

---

**Exercice 1.7.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n.\mathrm{e}^{-t}}{1+nt}dt$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n$ cette intégrale.

2. a) Soit $J_n = \displaystyle\int_{1/n}^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du$. Montrer que $J_n$ est équivalent à $\ln(n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

b) En déduire une constante $C$ telle que $I_n$ soit équivalent à $C\ln(n)$ pour $n$ tendant vers l'infini.

3. a) Déterminer les valeurs de l'entier naturel $n$ pour lesquelles la série de terme général $\dfrac{n.\mathrm{e}^{-k}}{1+nk}$ ($k$ décrivant $\mathbb{N}$) est convergente. On note alors $S(n)$ sa somme.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leqslant S(n) - n \leqslant I_n$.

c) En déduire une constante $D$ telle que $S(n)$ soit équivalent à $nD$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. La règle de Riemann prouve donc la convergence de cette intégrale.

2. a) $\ln(n) - J_n = \displaystyle\int_{1/n}^1 \frac{du}{u} - \int_{1/n}^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du = \int_{1/n}^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du$

Comme $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u} = 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est positive et bornée sur $[0,1]$ ; si on note $M$ un majorant de cette fonction, on a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \ln(n) - J_n \leqslant M$$

En particulier $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln(n)$.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt = \mathrm{e}^{1/n}\int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy$ (on a effectué le changement de variable $y = t + \dfrac{1}{n}$)

Soit : $I_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} \displaystyle\int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy = \int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy \underset{(n\to\infty)}{\sim} \ln(n)$. Donc $C = 1$.

3. a) On a : $0 \leqslant \dfrac{n.\mathrm{e}^{-k}}{1+nk} \leqslant n.\mathrm{e}^{-k}$. La série majorante est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1}$, donc convergente et la convergence de la série proposée s'en déduit, pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où :

$$\forall\, k \geqslant 1, \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\frac{1}{n}+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt$$

En sommant, pour $k$ variant de 1 à l'infini et en ajoutant le terme d'indice $k=0$, on obtient :

$$0 \leqslant S(n) - n \leqslant I_n$$

c) Il résulte du b) que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} = 1$, *i.e.* $S(n) \underset{(\infty)}{\sim} n$

---

**Exercice 1.8.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

Montrer que cette intégrale est convergente. Calculer $I_0$ et $I_1$.

Étudier la monotonie de la suite $(I_n)$. En déduire sa convergence.

2. a) Montrer que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite $(I_n)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}I_n$.
Montrer que les suites $(J_n)$ et $(K_n)$ sont adjacentes.
En déduire l'existence d'un réel $\alpha$ strictement positif tel que $I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$ au voisinage de $+\infty$.

4. a) A l'aide de la relation de récurrence de la question 2. a), trouver une expression de $I_n$ utilisant $\mathrm{C}_{2n}^n$.

b) On admettra la formule de Stirling : au voisinage de $+\infty$, $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
Déterminer $\alpha$.

---

**Solution :**

1. $\star$ La fonction à intégrer est continue sur $[0,1[$ et équivalente en 1 à $\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ ; la règle de Riemann montre que l'intégrale converge.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \big[-2\sqrt{1-x}\big]_0^1 = 2.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1-(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = I_0 - \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = 2 + \frac{2}{3}\big[(1-x)^{3/2}\big]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$\star$ Enfin, $\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ donne $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite $(I_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

2. a) En intégrant par parties, pour $n \geqslant 1$ :

$$I_n = \big[x^n(-2\sqrt{1-x})\big]_0^1 + 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx = 2n\int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

soit : $I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$ et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$$

b) $v_n = \ln\big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\big) = -\ln\big(1 + \frac{1}{2n}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

La série de terme général $v_n$ est une série à termes tous négatifs. Son terme général est équivalent à celui d'une série divergente : $\sum v_n$ diverge et on peut même dire que ses sommes partielles tendent vers $-\infty$.

Par télescopage : $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\big(\frac{I_n}{I_0}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(I_n) = -\infty$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

3. Pour $n \geqslant 2$ :

$\star$ $\dfrac{J_n}{J_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times \dfrac{2n}{2n+1} > 1$ (en élevant au carré) : $(J_n)$ croît.

$\star$ $\dfrac{K_n}{K_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \dfrac{2n}{2n+1} < 1$ (encore en élevant au carré) : $(K_n)$ décroît.

$\star$ $K_n - J_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})I_n = \dfrac{I_n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Les suites $(J_n)$ et $(K_n)$ sont bien adjacentes, donc sont convergentes de même limite notée $\alpha$ et on a $\alpha \geqslant J_1 > 0$.
Ainsi $\sqrt{n}I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et : $\quad I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

4. a) $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3}\, I_0 = \dfrac{2(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)\mathrm{C}_{2n}^{n}}$

b) On a $\mathrm{C}_{2n}^{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}2\pi n} = 2^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, d'où :

$$I_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \qquad \text{d'où } \alpha = \sqrt{\pi}.$$

---

**Exercice 1.9.**

Soit $\alpha$ un réel strictement supérieur à 1.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points $b$ et 1, démontrer que, pour tout réel $b$ de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leqslant b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

4. On pose, pour tout entier $n$ non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ est convergente (utiliser la formule de la question 2 puis un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{t^{\alpha n}}$. Comme $\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$, on a $\alpha n > 1$ et la convergence de l'intégrale résulte de la règle de Riemann.

2. En intégrant par parties, directement avec la borne $+\infty$, puisque cela n'introduit pas d'ambiguté :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\, dt = \Big[ -t \times \frac{\alpha n t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \Big]_0^{+\infty} + \alpha n \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt$$

Soit : $u_n(\alpha) = \alpha n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + t^\alpha - 1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$

c'est-à-dire :

$$\forall\, n \geqslant 1, u_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha n - 1}{\alpha n}\, u_n(\alpha)$$

et, par récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 1, u_n(\alpha) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha(n-k) - 1)}{\alpha^{n-1}(n-1)!} u_1(\alpha)$$

3. a) $\forall t \geqslant 0, 1+t^\alpha \geqslant 1$, donc pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ et en intégrant :

$$u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$$

La suite $(u_n(\alpha))_n$ est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

b) $\star$ Clairement $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant b$

$\star$ De même $\displaystyle\int_b^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant (1-b)\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}$

$\star$ Enfin, sur $[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$, d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \Big[\frac{1}{(1-\alpha n)t^{\alpha n-1}}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha n-1}$$

D'où le résultat par application de la relation de Chasles.

c) $b$ étant fixé, par prolongement des inégalités à la limite, on obtient :

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n(\alpha) \leqslant b$$

et ceci étant valable pour tout $b \in ]0,1[$ : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(\alpha) = 0$.

4. a) Pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = \ln\big(\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\big) + \dfrac{1}{\alpha}\ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big)$

Or $\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = 1 - \dfrac{1}{\alpha n} \implies \ln\big(\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\big) = -\dfrac{1}{\alpha n} - \dfrac{1}{2\alpha^2 n^2} + o(n^{-2})$, et :

$$\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(n^{-2})$$

Donc $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\dfrac{1}{2n^2}\big(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\big) + o(n^{-2})$ et la règle de Riemann donne la convergence de la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$, c'est-à-dire, par télescopage, de la suite $w_n(\alpha)$.

b) En notant $T(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(\alpha)$, on a donc :

$\ln u_n(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha}\ln n = T(\alpha) + o(1)$, *i.e.* :

$$u_n(\alpha) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\mathrm{e}^{T(\alpha)+o(1)} \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}}\mathrm{e}^{T(\alpha)}, \text{ donc } K(\alpha) = \mathrm{e}^{T(\alpha)}$$

---

**Exercice 1.10.**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On lui associe la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \geqslant 0$, par :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Pour tout $x$ réel tel que les séries suivantes convergent, on pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \geqslant 0, a_n = (-1)^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions $a$ et $A$.

b) Déterminer, si elle existe, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge et déterminer sa valeur.

2. Soit $\alpha$ un réel non nul. On pose dans cette question, pour tout $n \geqslant 0, a_n = \alpha^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions $a$ et $A$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha$, l'existence de $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$.

c) Pour quelles valeurs de $\alpha$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge-t-elle ? Déterminer alors sa valeur.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est convergente. On note $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

a) Soit $(c_n)$ une suite de réels tels que $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}\Big) = 0$$

b) En utilisant le reste de la série convergente $\sum\limits_n a_n$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$ existe et la calculer.

---

**Solution :**

1. a) On a immédiatement :

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}, A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Ces deux fonctions sont définies pour tout $x$ réel.

b) Il est immédiat que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x) = \frac{1}{2}$.

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}dx = \frac{1}{2}$.

2. a) On a : $a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Cette fonction est définie pour tout $x$ réel. De plus :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

et :

$$A(x) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\alpha^{n+1}) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-\alpha}(\mathrm{e}^{x} - \alpha \mathrm{e}^{\alpha x})$$

Cette fonction est définie pour tout $x$ réel.

b) On a :

$$\mathrm{e}^{-x}A(x) = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-1)x})$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$ existe si et seulement si $\alpha < 1$. Sa valeur est alors $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

c) On a $\mathrm{e}^{-x}a(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Dans ce cas, sa valeur est $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|c_n| \leqslant \varepsilon$. Écrivons

$$\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\frac{x^n}{n!}\Big) = \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{N} c_n\frac{x^n}{n!}\Big) + \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n\frac{x^n}{n!}\Big)$$

On a :

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n\frac{x^n}{n!}\Big)\right| \leqslant \varepsilon.\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\Big) < \varepsilon$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{N} c_n\frac{x^n}{n!}\Big) = 0$$

puisque le second terme de ce produit est un polynôme.

b) On écrit $A_n = A - R_n$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} R_n = 0$. On a alors :

$$\mathrm{e}^{-x}A(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big[Ae^x - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n\frac{x^n}{n!}\Big]$$

et, par la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x) = A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

---

**Exercice 1.11.**

Soient $A = (0,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$, $D = (0,-1)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$.

1. Montrer que la restriction de $f$ au rectangle $ABCD$ (notée encore $f$) est bornée.

2. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur le rectangle $ABCD$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est continue sur le fermé borné $ABCD$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

2. Soit $(x, y)$ un point où $f$ admet un extremum. Si $(x, y)$ appartient à (l'ouvert) l'intérieur du rectangle, $f$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(x, y)$ , et $(x, y)$ est un point critique de $f$. Il vérifie donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6x^2 - 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y = 0$$

Il existe deux solutions : $O = (0,0), E = (-1/3, 0)$, mais seul le second appartient à l'intérieur du rectangle.

En ce second point, on a avec les notations de Monge : $r = 2$, $s = 0$, $t = -2$, $s^2 - rt = 4 > 0$. Il s'agit d'un point col.

Les extremums de $f$ se trouvent donc à la frontière de $ABCD$.

- Sur $[AB]$, $y = 1, x \in [-1, 0]$, $f(x, y) = -2x^3 - x^2 + 4$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1, 0]$ montre que son maximum est atteint en $x = -1$ et vaut 5, et que son minimum est atteint en $x = -1/3$ et vaut 107/27.
- Sur $[BC]$, $x = -1, y \in [-1, 1]$, $f(x, y) = 6 - y^2$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1, 0]$ montre que son maximum est atteint en $x = 0$ et vaut 6, et que son minimum est atteint en $x = 1$ et $x = -1$ et vaut 5.
- Sur $[AD]$, $x = 0, y \in [-1, 1]$, $f(x, y) = 5 - y^2$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1, 1]$ montre que son maximum est atteint en $y = 0$ et vaut 5, et que son minimum est atteint en $y = 1$ et $y = -1$ et vaut 4.

En conclusion, le maximum de $f$ vaut 6 et est atteint en $(-1, 0)$ et le minimum de $f$ vaut 107/27 et est atteint en $(-1/3, 1)$ et $(-1/3, -1)$.

---

**Exercice 1.12.**

1. Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = \mathrm{e} - 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = -1 + nu_{n-1}$.
Quelles sont les limites possibles de cette suite ?

2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} dx$.

a) Déterminer la limite de la suite $(I_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

b) Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)$ puis que :

$$I_n = n!\big(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big)$$

3. Soit $a$ un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $v_0 = a - 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = -1 + nv_{n-1}$.
Montrer que si $a \neq \mathrm{e}$, la suite $(v_n)$ est divergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n = \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

En déduire que $u_n$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

5. Pourquoi la plupart des calculatrices sur lesquelles on programme la suite $(u_n)$ vous inciteront à une mauvaise conclusion sur la limite de cette suite ?

---

**Solution :**

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.
Si on avait $\ell 0$, alors $n.u_{n-1}$ serait de limite infinie et la relation $u_n = -1 + nu_{n-1}$ conduit à une contradiction. La seule limite réelle possible est donc 0 (mais *a priori* rien ne dit que la suite converge et on ne peut exclure que la suite soit de limite infinie).

2. a) On peut écrire :

$$\int_0^1 x^n dx \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n dx$$

Donc : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

b) Une intégration par parties donne facilement

$$I_n = -1 + nI_{n-1}.$$

c) $\star$ Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}dx = \mathrm{e} - 1$, les suites $(I_n)$ et $(u_n)$ vérifient la même relation de récurrence à un cran et ont même terme initial, donc concident. En particulier :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

$\star$ La relation $I_n = -1 + nI_{n-1}$ donne, en divisant par $n!$ :

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{-1}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

En sommant ces relations à partir de $n = 1$, et avec $I_0 = \mathrm{e} - 1$, il vient :

$$I_n = n!\big(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big)$$

3. Posons pour tout $n \geqslant 0, w_n = u_n - v_n$. Alors $w_0 = \mathrm{e} - a$, et pour tout $n \geqslant 1, w_n = nw_{n-1}$.
Ainsi pour tout $n \geqslant 0, w_n = n!w_0$. Cette dernière suite ne converge que si $w_0 = 0$.
La suite $(u_n)$ étant convergente, la suite $(v_n)$ converge si et seulement si $v_0 = u_0$.

4. Les relations :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & -1 + (n+2)u_{n+1} \\ u_{n+1} & = & -1 + (n+1)u_n \end{cases}$$

donnent :

$$u_{n+2} = -n - 3 + (n+2)(n+1)u_n$$

soit :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, pour $n$ assez grand $|u_n| \leqslant 1$ et $\left| \dfrac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} \right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Le terme prépondérant est donc $\dfrac{1}{n+1}$ et :

$$u_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

5. La valeur de e contenue en mémoire des calculatrices numériques est une valeur approchée de la valeur exacte de e (car une calculatrice ne reconnait que des nombres décimaux, ou parfois aussi des nombres rationnels). Ainsi, la suite $(u_n)$ programmée sur une telle calculatrice est en fait une suite $(v_n)$ qui divergera vers l'infini.

---

**Exercice 1.13.**

On considère deux nombres réels strictement positifs $u_0$ et $v_0$. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ en posant pour $n \geqslant 0$ :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] \\ \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}\right] \end{cases}$$

1. Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs, montrer que l'on a :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. On se propose de montrer que les suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

a) Montrer par récurrence que $v_n \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

c) Terminer en montrant que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

3. Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$.

---

**Solution :**

1. Après réduction, l'inégalité $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ est équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui semble raisonnable !
De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si $a = b$.

2. a) On voit par une récurrence immédiate que $u_n$ et $v_n$ sont deux réels positifs, pour tout $n \geqslant 1$. On applique l'inégalité de la question précédente et il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \geqslant \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} = v_{n+1}$$

b) Comme $v_n \leqslant u_n$, il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n$$

Ainsi la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a également :

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n}\right] = \frac{1}{v_n}$$

Ainsi la suite $(v_n)_n$ est croissante.

c) Les relations de récurrence impliquent que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \leqslant \frac{u_n-v_n}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ et par récurrence :

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$$

et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Ceci achève de prouver que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

3. Soit $\ell$ la limite commune de ces deux suites. On remarque que :

$$v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \implies u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n = \cdots = u_0v_0.$$

Par passage à la limite, il vient $\ell^2 = u_0v_0$ et par positivité :

$$\ell = \sqrt{u_0v_0}.$$

---

**Exercice 1.14.**

On désignera par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}.$$

a) Etudier les branches infinies de $f$.

b) Faire une étude des variations, de la convexité de $f$ et donner une représentation graphique de $f$.

c) Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

2. On considère la fonction $g$ définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par

$$g(x,y) = x \ln y - y \ln x$$

a) Montrer que $g$ est de classe $C^\infty$.

b) Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de $g$.

c) Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de $g$.

---

**Solution :**

1. a) Par les théorèmes de comparaison, il vient $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$.

Ainsi la droite d'équation $t = 0$ est asymptote à la courbe représentant $f$ au voisinage de $0^+$.

De plus

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = 1, \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t) - t = -\infty$$

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, on a une direction asymptotique d'équation $y = t$ et la courbe représentative présente une branche parabolique oblique.

b) La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et un calcul élémentaire donne, pour tout $t > 0$ :

$$f'(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} > 0, \qquad f''(t) = \frac{t-2}{t^3}$$

Il en découle que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, admet un point d'inflexion en $t = 2$, est concave sur l'intervalle $]0, 2]$ et convexe sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

c) Puisque $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et comme

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = -\infty, \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty,$$

par le théorème de la bijection, il existe une seule valeur de $t > 0$ pour laquelle $f(t) = 0$ ; cette valeur est $t = 1$.

2. a) La fonction $g$ est de classe $C^2$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, en utilisant les théorèmes du cours sur les sommes et produits de fonctions deux fois dérivables.

b) Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \ln y - \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y} - \ln x$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

c) Les points critiques sont donnés par $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, soit :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{\ln x} \\ \ln x - \ln(\ln x) - \dfrac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

Par la première question, le seul point critique est le point $(\mathrm{e}, \mathrm{e})$. D'autre part, avec les notations de G. Monge, en ce point :

$$r = \frac{1}{\mathrm{e}}, s = 0, t = -\frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ d'où } s^2 - rt > 0.$$

Le point $(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ n'est donc pas un extremum local. Donc ce n'est pas non plus un extremum global.

---

**Exercice 1.15.**

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la relation $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x \sin t}\, dt$.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, \mathrm{e}^{|u|}$.

2. En déduire que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\Big|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x \sin t} \sin t\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}\, h^2\, \mathrm{e}^{|h|}\, \varphi(x).$$

3. En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x \sin t} \sin t\, dt.$$

Indiquer sans démonstration pourquoi $\varphi$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée seconde.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$.

5. Étudier la variation de $x \mapsto x - \varphi(x)$ et montrer qu'il existe un et un seul réel $x$ tel que $\varphi(x) = x$.
On note $\alpha$ ce réel. Montrer que $0 < \alpha < 1$. *On justifiera (et utilisera) que, pour tout* $t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$. *On admettra que* $\frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) < 0{,}993$.

On considère maintenant une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi\big(\varphi(x)\big) < \frac{\pi}{2}$.
(*Par conséquent,* $0 < u_2 < \frac{\pi}{2}$.)
Montrer aussi que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $-1 < \varphi'(x) < 0$.

7. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_2 = \alpha$ ?

8. On suppose que $u_2 < \alpha$. Montrer que $u_2 < \alpha < u_3$ et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$.
Montrer que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ croît et que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît.
Montrer que, pour tout $x \in [u_2, u_3]$, $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(u_2)| < 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

9. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_2 > \alpha$ ?

---

**Solution :**

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment $[0, u]$ donne :

$$|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} \sup_{[0,u]} |\exp''|$$

Si $u > 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''| = \mathrm{e}^u$, si $u \leqslant 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''| = \mathrm{e}^0 = 1$, et dans les deux cas on a bien : $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^{|u|}$.

2. En plaçant tout sous la même intégrale :

$$\begin{aligned}
\Delta(h) &= \left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\sin t\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}(\mathrm{e}^{-h\sin t} - 1 - h\sin t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}|\mathrm{e}^{-h\sin t} - 1 - h\sin t|\,dt \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\frac{h^2\sin^2 t}{2}\mathrm{e}^{|h|\sin t}\,dt \leqslant \frac{h^2\mathrm{e}^{|h|}}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\,dt \leqslant \frac{h^2\mathrm{e}^{|h|}}{2}\varphi(x).
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a donc :

$$\left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} -\,\mathrm{e}^{-x\sin t}\sin t\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}|h|\mathrm{e}^{|h|}\varphi(x)$$

Par encadrement, on en déduit que $\varphi$ est dérivable au point $x$, avec :

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\sin t\,dt$$

Le même type de calcul montre que $\varphi$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\sin^2 t\,dt$$

4. Le théorème de positivité de l'intégrale montre que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0 \text{ et } \varphi''(x) > 0.$$

5. La fonction $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ; elle s'annule donc en au plus un réel.

$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0$
$\delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0$

En effet, par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, on a $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$ et donc

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\sin t}dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2t/\pi}dt = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) < 1.$$

De tout ceci, il résulte qu'il existe un unique $\alpha$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in ]0, 1[$.

6. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x \sin t}$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration $[0, \pi/2]$, on a $\varphi(x) > 0$. Comme $\varphi$ est strictement décroissante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

Soit $x > 0$, on sait déjà que $\varphi'(x) < 0$. Comme $\varphi'$ est strictement croissante :

$$\forall\, x > 0, \varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$$

7. Si $u_2 = \alpha$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 2. On peut même dire que cette suite est constante, puisque $\varphi$ étant injective l'équation $\varphi(x) = \alpha$ n'admet que la solution $\alpha$ et donc $u_1 = \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

8. $\star$ Comme $\varphi$ décroît strictement : $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$, soit $u_3 > \alpha$, et par une récurrence simple :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$$

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists\, c \in [\alpha, u_n] \subset \mathbb{R}_+^*, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(c)(u_n - \alpha)$$

Il s'ensuit que $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$.

La suite de terme général $|u_n - \alpha|$ est strictement décroissante et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \alpha - u_{2n+2} < \alpha - u_{2n}, \text{ soit } u_{2n} < u_{2n+2}.$$

On conclut que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît (strictement) et comme $\varphi$ est décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît (strictement).

$\star$ Pour tout $x \in [u_2, u_3], \varphi'(u_2) \leqslant \varphi'(x) < 0$ et $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(u_2)| < 1$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |\varphi'(u_2)|.|u_n - \alpha|$.

Ainsi $\forall\, n \geqslant 2, |u_n - \alpha| \leqslant |\varphi'(u_2)|^{n-2}|u_2 - \alpha|$ et donc :

$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha$$

9. Si $u_2 > \alpha$, alors $0 < u_1 < \alpha$ et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs.

---

**Exercice 1.16.**

1. Étudier la convergence de la suite de terme général $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right)$

2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs telle que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que la série de terme général $u_k$ converge.

[On pourra chercher à majorer $\sigma_p = \sum\limits_{k=1}^{2^p} u_k$, pour $p \geqslant 1$.]

---

**Solution :**

1. Étudions la suite $\big(\ln(p_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{1}{2^k})$$

Or $v_k = \ln(1+\dfrac{1}{2^k})$ est positif et $v_k \sim \dfrac{1}{2^k}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi la série de terme général $v_k$ est convergente et si on note $\ell$ sa somme, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\mathrm{e}^{\ell}$.

2. On remarque que pour tout $p \geqslant 1$

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k = \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k + \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \leqslant \big(1+\frac{1}{2^{p-1}}\big)\sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k$$

soit : $\sigma_p \leqslant \big(1+\frac{1}{2^{p-1}}\big)\sigma_{p-1}$.

Par récurrence, il vient donc : $\sigma_p \leqslant \sigma_0 \prod\limits_{k=1}^{p}\big(1+\frac{1}{2^{k-1}}\big) = u_1 \prod\limits_{k=0}^{p-1}\big(1+\frac{1}{2^k}\big)$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la première question étant convergente, la suite $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par une constante $M$ (que l'on peut prendre égale à $u_1\mathrm{e}^{\ell}$, puisque la suite $(p_n)$ est croissante).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant 2^{p_n}$ ; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sigma_{p_n} \leqslant M$$

La série $\sum u_n$ étant à terme positifs et ses sommes partielles étant majorées, cela signifie qu'elle converge.

---

**Exercice 1.17.**

Soit $f$ l'application définie par : $f(x) = \exp(-\lambda x^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > \frac{\mathrm{e}}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell$ sur $\mathbb{R}$ et que $\ell$ vérifie : $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que les suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones et convergentes.

3. a) On pose $g = f \circ f$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ ne peut admettre de solution que sur $]0,1[$. Vérifier que $g(\ell) = \ell$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet trois solutions sur $]0,1[$ : $a, b$ et $\ell$. Vérifier que $\ell$ est strictement compris entre $a$ et $b$.

c) Déterminer les limites des suites $(u_{2n})$ et de $(u_{2n+1})$.

---

**Solution :**

1. $f$ est à valeurs strictement positives, donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}^-$.
En revanche $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $\varphi(0) = 1$,

$$\varphi(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}) = \mathrm{e}^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} > 0 \text{ et } \varphi(1) = \mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$$

Ainsi $\varphi$ s'annule en un point $\ell$ et un seul et $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$.

2. Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la suite $(u_n)$ est à valeurs dans $[0,1]$.
La fonction $f$ étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$ et les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones de sens contraires (le signe de $u_{n+2} - u_n$ est le signe contraire de celui de $u_{n+1} - u_{n-1}$, donc celui de $u_n - u_{n-2}$). Comme $u_2 > 0 = u_0$ on peut même dire que $(u_{2n})$ est croissante et $(u_{2n+1})$ est décroissante. De plus ces deux suites sont bornées et sont donc convergentes.

3. a) Déjà : $f(\ell) = \ell \implies g(\ell) = f\big(f(\ell)\big) = \ell$.
D'autre part, $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \in ]0,1]$, donc *a fortiori* $g(x) \in ]0,1]$ et l'équation $g(x) = x$ ne peut admettre des solutions que dans l'intervalle $]0,1]$ et on vérifie aisément que $g(1)1$.

b) $g(x) = x \iff -\lambda[f(x)]^2 = \ln x \iff \ln\lambda - 2\lambda x^2 = \ln(-\ln x)$
Soit $h : x \mapsto \ln(-\ln x) + 2\lambda x^2 - \ln\lambda$, pour $0 < x < 1$. La fonction $h$ est dérivable et : $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\big(1 + 4\lambda x^2 \ln x\big)$.
Posons $k : x \mapsto 1 + 4\lambda x^2 \ln x$, on a $k'(x) = 4\lambda x(2\ln x + 1)$ et comme $k(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}) < 0$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1/\sqrt{\mathrm{e}}$ | | $\beta$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $k(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

Ce qui donne :

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $\alpha$ | | $\ell$ | | $\beta$ | | $b$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

(Comme $h(\ell) = 0$ et $h$ croissante sur $[\alpha, \ell]$, on a $h(\alpha) < 0$ et l'équation $h(x) = 0$ a une solution entre $0$ et $\alpha$ ; même raisonnement entre $\ell$ et $\beta$ ...).
Comme $g(x) = x \iff h(x) = 0$, la question est achevée :

l'équation $g(x) = x$ admet trois solutions : $a, \ell, b$.

c) On a $u_0 = 0 < a$. Par croissance stricte de $g = f \circ f$, on a donc :
$u_2 = g(u_0) < g(a) = a$, puis par récurrence $\forall\, n, u_{2n} < a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} \leqslant a$.

La suite $(u_{2n})$ converge vers un point fixe de $g$ (car $g$ est continue), donc nécessairement vers $a$.
Alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a) > \ell$, et comme $(u_{2n+1})$ converge aussi vers un point fixe de $g$, elle converge vers $b$.

---

**Exercice 1.18.**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}_+) \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k \geqslant 1)$$

2. On suppose $M \neq 0$.
   a) Montrer que $F(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Mx$.
   b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est-elle convergente ?
3. On suppose $M = 0$.

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

---

**Solution :**

1. Par le changement de variable $t = kT + u$ :

$$u_k = \int_0^T \frac{|f(u)|}{u + kT}\,du \geqslant \frac{1}{(k+1)T}\int_0^T |f(u)|\,du$$

Comme $\displaystyle\int_0^T |f(u)|\,du > 0$, la règle de Riemann donne la divergence de la série de terme général positif $u_k$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$ et par la règle de comparaison série-intégrale, l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ est divergente.

2. a) Soit $x > 0$, posons $p_x = \lfloor x/T \rfloor$ et $y = x - p_x T$. Par découpage et périodicité :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{p_x - 1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt + \int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t)\,dt = p_x MT + \int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t)\,dt$$

On a : $\displaystyle\Big|\int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t)\,dt\Big| \leqslant \int_{p_x T}^{(p_x+1)T} |f(t)|\,dt = \int_0^T |f(t)|\,dt$, et $p_x \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{x}{T}$.

Le terme résiduel est borné, donc négligeable devant le premier terme et :

$$F(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} p_x TM \underset{(x\to+\infty)}{\sim} xM$$

b) En intégrant par parties :

$$\int_T^X \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{F(X)}{X} - \frac{F(T)}{T} + \int_T^X \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

On a $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{F(X)}{X} = M$ et $\dfrac{F(t)}{t^2} \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \dfrac{M}{t}$. La règle de Riemann prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est divergente et $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ aussi.

3. Le calcul fait au début de la question 2. montre que dans le cas $M = 0$, la fonction $F$ est bornée. En reprenant l'intégration par parties faite en 2. b), la règle de Riemann prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ aussi( et on a vu en 1. que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente).

---

**Exercice 1.19.**

Pour $\alpha$ et $\beta$ réels, on considère l'intégrale

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta\,dt$$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition $D$ de $I$ :

$$D = \Big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\ ,\ I(\alpha,\beta) \text{ converge}\Big\}$$

2. a) Montrer que, pour $(\alpha,\beta) \in D$,

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^\beta\,dx$$

b) Calculer $I(n,0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha,0) \in D$, on a :

$$I(\alpha,n) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) En déduire un équivalent de $I(\alpha,n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$, à $n$ fixé.

c) Déterminer $\lim I(\alpha,n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$, à $n$ fixé.

---

**Solution :**

1. Soit $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta$. La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

$\star$ On a : $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(0^+)}{\sim} (-\ln t)^\alpha = o(t^{-1/2})$ et par la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est convergente.

$\star$ On a : $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(1^-)}{\sim} (1-t)^{\alpha+\beta}$ (car $\ln t \underset{(1^-)}{\sim} t-1$) et par la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

Ainsi $I(\alpha,\beta)$ existe si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

2. a) Par le changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$, il vient, pour $\alpha+\beta > -1$ :

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^\beta\,dx$$

b) En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ : $I(n,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = n!$.

3. a) Si $(\alpha,0) \in D$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha,n) \in D$ et toutes les intégrales écrites étant convergentes :

$$I(\alpha,n) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k \mathrm{e}^{-kx}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-(k+1)x}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u} du \quad [\text{on a posé } u = (k+1)x\ ]$$

Soit :

$$I(\alpha,n) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) Si $n$ est fixé, lorsque $\alpha$ tend vers l'infini, tous les termes de la somme ont pour limite 0, sauf celui pour $k=0$ qui vaut 1, donc :

$$I(\alpha,n) \underset{(\alpha\to+\infty)}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$$

c) Or : $\Gamma(\alpha+1) \geqslant \displaystyle\int_2^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} dx \geqslant 2^\alpha \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où toujours pour $n$ fixé :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha,n) = +\infty$$

---

**Exercice 1.20.**

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\right\}$ et $f$ la fonction définie sur $D$ par

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. La fonction $f$ admet-elle des extremums ?

2. Déterminer les points critiques de $f$. Déterminer les extremums de $f$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est continue sur le fermé borné $D$, donc est bornée et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

2. La fonction $f$ est polynomiale, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + 2y$$

Ainsi le seul point critique de $f$ est $(0,0)$. Or $f(x,x) = 6x^2$ et $f(-x,x) = -2x^2$, alors que $f(0,0) = 0$. Il n'y a donc pas d'extremum en ce point.

Les extremums de $f$ sur $D$ sont donc atteints en des points de la frontière de $D$. Or :

$\star$ Pour $x = -1$, $f(-1,y) = y^2 - 4y + 1 = (y-2)^2 - 3$ est maximal pour $y = -1$ de maximum 6 et minimum pour $y = 1$ de minimum $-2$.

$\star$ Pour $y = 1$, $f(x,1) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, qui est maximal pour $x = 1$, de maximum 6 et minimum pour $x = -1$, de minimum $-2$.

$\star$ Pour $y = x$, $f(x,x) = 6x^2$, maximal en 1, de maximum 6 et minimal en 0, de minimum 0.

Finalement $f$ est minimale au point $(-1,1)$, de minimum $-2$ et maximale aux points $(-1,-1)$ et $(1,1)$ de maximum 6.

*Remarque* : on pouvait noter que $f(x,y) = f(y,x)$ et ne faire l'étude que sur la moitié de la frontière.

---

**Exercice 1.21.**

1. Soit $a$ un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{t^n \mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \mathrm{e}^a - 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On note $F_n$ l'application de $[0,+\infty[$ dans lui-même définie par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$.

a) Montrer que $F_n$ est une bijection. On note $x_n$ sa bijection réciproque ; ainsi, pour tout réel $y$ positif ou nul, $x_n(y)$ est l'unique réel positif ou nul tel que $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y$.

b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : y \mapsto x_n(y)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

c) Montrer que $x_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Dans cette question $y$ est fixé tel que $y < \mathrm{e} - 1$.

a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $x_n(y) < 1$.

b) Pour $n \geqslant N$, comparer les trois réels $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$, $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{n+1}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$.

En déduire les variations de la suite $(x_n(y))$ pour $n \geqslant N$ et la convergence de la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\ell$ sa limite.

c) Démontrer, pour $n \geqslant N$, l'inégalité $\displaystyle\left|\int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt\right| \leqslant \mathrm{e}|x_n(y)-\ell|$

En déduire l'expression de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\ell \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$ en fonction de $y$ puis l'expression de $\ell$ en fonction de $y$.

---

**Solution :**

1. a) Pour $t \in [0,a]$, $\dfrac{t^n\mathrm{e}^t}{1+t^n} \leqslant t^n\mathrm{e}^a \leqslant t^n\mathrm{e}$, d'où en intégrant :

$$0 \leqslant \int_0^a \frac{t^n\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \frac{a\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

b) $\displaystyle \mathrm{e}^a - 1 - \int_0^a \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^a \mathrm{e}^t dt - \int_0^a \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^a \frac{t^n\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$, d'où, par l'encadrement vu en a) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \mathrm{e}^a - 1$$

2. a) $F_n$ est la primitive nulle en 0 de l'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}$, continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $F_n$ est dérivable de dérivée $F_n'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^n}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $F_n$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $[0, \lim\limits_{+\infty} F_n[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$ est trivialement divergente, donc $\lim\limits_{+\infty} F_n = +\infty$ et $F_n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) La bijection réciproque $x_n$ est donc également strictement croissante, de limite $+\infty$ en $+\infty$.

c) $x_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que bijection réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée ne s'annule pas.

3. a) $\displaystyle\int_1^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y - \mathrm{e} + 1 < 0.$

A partir d'un certain rang $N$, on a donc $\displaystyle\int_1^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt < 0$, ce qui, compte tenu de la positivité de la fonction intégrée, impose $x_n(y) < 1$ à partir de ce même rang.

b) Pour $n \geqslant N$, on a $\forall t \in [0, x_{n+1}(y)] \subset [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^{n+1}}$, d'où :

$$\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{n+1}}\,dt = y = \int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$$

et comme la fonction intégrée, dans les termes extrêmes, est positive on en déduit $x_{n+1}(y) \leqslant x_n(y)$.

La suite $(x_n(y))_n$ est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0, donc est convergente vers $\ell \in [0,1[$.

c) Pour $n \geqslant N$, on a $\ell \leqslant x_n(y) < 1$ et pour tout $t \in [\ell, x_n(y)]$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} \leqslant$ e, d'où pour $n \geqslant N$ :

$$0 \leqslant \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \int_\ell^{x_n(y)} \mathrm{e}\,dt = \mathrm{e}(x_n(y) - \ell)$$

et, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = 0$.

Or $\displaystyle\int_0^\ell \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt - \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y - \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\ell \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y$ et d'après la première question, cette limite vaut également $\mathrm{e}^\ell - 1$, donc $y = \mathrm{e}^\ell - 1$, soit $\ell = \ln(y+1)$.

---

**Exercice 1.22.**

Pour $n$ entier naturel non nul, on définit l'application $f_n$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

1. Déterminer l'ensemble $A$ des entiers naturels pour lesquels l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente. Lorsque $n$ appartient à $A$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

2. a) A l'aide d'un encadrement de $\dfrac{f_n(x)}{f_2(x)}$, montrer que la suite $(I_n)$ est majorée par la suite de terme général $\dfrac{B}{n!}$ pour une valeur convenable de $B$.

b) Préciser la nature de la série de terme général $I_n$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\cdot$

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $H_n \sim \ln n$.

b) Calculer $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, puis, encadrer à l'aide de termes de la suite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la quantité $-\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ pour $x$ élément de $[0,1]$.

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{1}{n!\ln n}$

4. Montrer que pour $n \in A$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = nI_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de $I_n$.

---

**Solution :**

1. L'application $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^n}$. Donc $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n > 1\} = \{n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2\}$.

2. a) Si $n > 2$, on a pour tout $x > 0$ :

$$0 \leqslant \frac{f_n(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)\dots(x+n)} \leqslant \frac{2}{n!}$$

d'où, en multipliant par $f_2(x)$ qui est strictement positif et en intégrant :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2I_2}{n!}$$

b) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ étant convergente, on en déduit, par majoration, la convergence de la série de terme général $I_n$.

3. a) Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ et par sommation, en mettant à part le terme d'indice 1 dans la somme de droite :

$$\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

D'où $H_n \sim \ln n$.

b) Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \dfrac{d}{dx}[\ln f(x)] = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$. Ainsi pour $x \in [0,1]$ :

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

c) Les termes étant tous positifs, on déduit de l'encadrement précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \frac{-f_n'(x)}{H_n} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{-f_n'(x)}{H_{n+1}-1}$$

d'où, en intégrant, compte tenu du fait que :

$$\int_0^1 -f_n'(x)\,dx = f_n(0) - f_n(1) = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\frac{n}{(n+1)!H_n} \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{n}{(n+1)!(H_{n+1}-1)}$$

Finalement, d'après a) :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{n}{(n+1)!\ln n} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

4. $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$

Or, par le changement de variable $x+1=t$ :

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+3)\dots(t+n+1)}\,dt$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} - \frac{1}{(x+2)\dots(x+n+1)}\Big)\,dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{(x+1)\dots(x+n+1)}\,dx = nI_{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit $I_{n+1} \sim \dfrac{1}{(n+1)!\ln n}$ et donc :

$$I_n \sim \frac{1}{n!\ln(n-1)} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

---

**Exercice 1.23.**

Dans cet exercice $E$ désigne l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $I_E$ désigne l'application identité de $E$ dans lui-même.
Si $f \in E$, on note $u(f)$ la primitive de $f$ sur $[0,1]$ nulle en 0 et $v(f)$ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1], v(f)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\,dt$$

1. Montrer que $u$ et $v$ définissent deux applications de $E$ dans lui-même.

2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$, puis que $u \circ v(f) = v(f) - u(f)$.

   b) Calculer les composées $(I_E - u) \circ (I_E + v)$ et $(I_E + v) \circ (I_E - u)$.

3. Soit $g$ l'élément de $E$, affine sur les segments $\big[0, \frac{1}{2}\big]$ et $\big[\frac{1}{2}, 1\big]$, et tel que $g(0) = g(1) = 0$, $g\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe un unique élément $f$ de $E$ tel que, pour tout $x$ appartenant à $[0,1]$,

$$f(x) - \int_0^x f(t)\,dt = g(x)$$

et le déterminer.

4. On définit par récurrence $u^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u^0 = I_E \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u \circ u^n$$

   a) Montrer que si $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$,

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt.$$

b) Montrer que si $f \in E$ et $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u^n(f)(x)$ est convergente et que : $\sum_{n=1}^{\infty} u^n(f)(x) = v(f)(x)$.

---

**Solution :**

1. Si $f \in E$, $f$ est continue sur $[0,1]$ ; elle y admet donc des primitives. Ainsi $u(f)$ existe et $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et *a fortiori* appartient à $E$.

On remarque que si $f \in E$, pour tout $x \in [0,1], v(f)(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt$, donc $v(f)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc élément de $E$.

2. a) $\star$ En intégrant par parties, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$v \circ u(f)(x) = \big[ - \mathrm{e}^{x-t} u(f)(t) \big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\, dt = -u(f)(x) + v(f)(x)$$

Donc $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$.

$\star$ $u \circ v(f)$ a pour dérivée $v(f)$ et :

$$[v(f) - u(f)]'(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt + \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} f(x) - f(x) = v(f)(x)$$

Donc $u \circ v(f)$ et $v(f) - u(f)$ diffèrent d'une constante ; étant nulles en 0, elles sont égales.

b) $(I_E - u) \circ (I_E + v) = I_E + v - u - u \circ v = I_E$ et comme $u$ et $v$ commutent (question a)), on a aussi $(I_E + v) \circ (I_E - u) = I_E$.

3. $I_E - u$ est bijective de bijection réciproque $I_E + v$. Il existe donc un unique élément $f$ de $E$ tel que $f - u(f) = g$, qui est $f = g + v(g)$.

$\star$ Pour $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = x + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} t\, dt = \mathrm{e}^x - 1$.

$\star$ Pour $x \in [1/2, 1]$, $f(x) = x + \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{x-t} t\, dt + \int_{1/2}^x \mathrm{e}^{x-t}(1-t)\, dt = 1 - 2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^x$.

4. Si $f$ appartient à $E$, $u^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\big((u^n)(f)\big)^{(k)} = u^{n-k}(f)$ ; en particulier pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\big((u^n)(f)\big)^{(k)}(0) = 0$.
La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ sur le segment $[0,x]$ se réduit donc à :

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \big(u^n(f)\big)^{(n)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

b) Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v(f)(x)-\sum_{k=1}^{n}u^k(f)(x)=\int_0^x\big(\mathrm{e}^{x-t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\big)f(t)\,dt$$

Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, pour tout $t\in[0,x]$ :

$$\big|\mathrm{e}^{x-t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\big|\leqslant\frac{|x-t|^n}{n!}\sup_{[0,x-t]}|\mathrm{e}^u|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{|x|}$$

D'où : $\big|v(f)(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}u^k(f)(x)\big|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{|x|}\Big|\displaystyle\int_0^x|f(t)|\,dt\Big|$.

Ce majorant tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, donc par encadrement :

$$v(f)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u^k(f)(x)$$

---

**Exercice 1.24.**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y)(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   b) Etudier l'existence des dérivées partielles de $f$.

2. On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(x,0)-1$.

   a) Etudier les variations de $h$.

   b) En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

3. Déterminer les points critiques de $f$.

4. a) Montrer que $\forall\, x\geqslant 0, f(x,y)\geqslant h(x)+1$.

   b) En déduire que $f$ admet en $\big(\frac{1}{\mathrm{e}},0\big)$ un minimum local.

5.On pose $g(x)=f(x,1)-f(0,1)$.

   a) Montrer que $g(x)$ est du signe de $x$.

   b) En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.

---

**Solution :**

1. a) La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme somme, produit, composée de fonctions continues.

Posons $u=(x,y)$ et $||u||^2=x^2+y^2$. Alors :

$$|x\ln(x^2+y^2)|\leqslant||u||.\ln(||u||^2)$$

Donc $\lim\limits_{||u||\to0}|x\ln(x^2+y^2)|=0$ et $\lim\limits_{||u||\to0}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}=1$, ce qui signifie que $f$ est continue en $(0,0)$.

b) On a

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{e^{x\ln x^2}-1}{x} \underset{(0)}{\sim} \ln x^2 = 2\ln|x|$$

d'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = -\infty,$$

ce qui signifie que $f$ n'est pas dérivable par rapport à $x$ en $(0,0)$.
En revanche :

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Enfin, en tout point $(x,y) \neq (0,0)$, $f$ admet des dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right](x^2+y^2)^x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy(x^2+y^2)^{x-1} \end{cases}$$

2. a) Il vient pour $x0$, $h(x) = e^{x\ln x^2} - 1$. Donc $h'(x) = (\ln x^2 + 2)e^{x\ln x^2}$. Ainsi $h'(x) = 0 \iff x = \pm e^{-1}$, ce qui donne les variations de $h$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-e^{-1}$ | | $0$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b) D'après la question précédente :

- si $x \in ]0, 1/e]$, alors $f(x,0) - f(0,0) < 0$,
- si $x \in ]-1/e, 0[$, alors $f(x,0) - f(0,0) > 0$.

Donc $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3. On a vu que pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right](x^2+y^2)^x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy(x^2+y^2)^{x-1} \end{cases}$$

Les points critiques sont donnés par :

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

système qui admet 4 solutions : $(0,1), (0,-1), (1/e, 0), (-1/e, 0)$.

4. a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et $x > 0$, on a :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x \geqslant x^{2x} = f(x,0) = h(x) + 1$$

b) Or on sait que $h$ admet en $1/e$ un minimum local ; donc $f$ admet en $(1/e, 0)$ un minimum local.

5. a) On a $g(x) = (x^2+1)^x - 1$. Donc $g'(x) = [\ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}]\,\mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)}$ et $g'(x)$ est du signe de $k(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$. Or :

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \times \frac{x^2+3}{x^2+1} \text{ est du signe de } x$$

Comme $k(0) = 0$, la fonction $k$ est positive, donc la fonction $g'$ aussi et comme $g(0) = 0$, $g$ est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$, donc du signe de $x$.

Ainsi $f(x,1) - f(0,1)$ est du signe de $x$ et $f$ n'admet pas d'extremum en $(0,1)$.

---

**Exercice 1.25.**

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose, pour tout élément $f$ de $E$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$

On définit la fonction $K$ de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{x} & \text{si } x > t \\ \dfrac{x^2}{t} & \text{si } x < t \\ x & \text{si } x = t \end{cases}$$

Pour $f \in E$, on pose $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt$.

1. a) Calculer $T(f)(0)$.

   b) Montrer que $\forall f \in E, \forall x \in ]0,1], |T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \big(\frac{x^2}{3} - x^2 \ln x\big)$.

   c) Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.

   d) $T$ est-il surjectif ?

2. Montrer que $T(f) \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

3. Calculer $T(f)(1) + [T(f)]'(1)$.

---

**Solution :**

1. a) On a $K(0,t) = 0$ et donc $T(f)(0) = 0$.

   b) Par la relation de Chasles, pour $x \in ]0,1]$ :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^x K(x,t)f(t)\,dt + \int_x^1 K(x,t)f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt \quad (*) \end{aligned}$$

D'où : $|T(f)(x)| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\,dt + x^2\|f\|_\infty \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$, c'est-à-dire :

$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty\big(\frac{x^2}{3} - x^2 \ln x\big)$$

c) La linéarité de $T$ est évidente.
L'expression $(*)$ montre que $T(f)$ est continue sur $]0,1]$ (intégrales d'une fonction continue les bornes étant elles-mêmes des fonctions continues), et la majoration précédente prouve que $\lim\limits_{x\to 0^+} T(f)(x) = 0 = T(f)(0)$.

Donc $T(f)$ est continue sur $[0,1]$ et $T$ est un endomorphisme de $E$.

d) On a vu que $T(f)(0) = 0$ ; $T(f)$ ne peut donc pas être la fonction constante égale à 1 qui appartient à $E$. Ainsi $T$ n'est pas surjectif.

2. La relation $(*)$ montre que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, avec :

$$\forall\, x \in ]0,1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + \frac{1}{x}x^2 f(x) + 2x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt - x^2\frac{f(x)}{x}$$

$$\forall\, x \in ]0,1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + 2x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la question 1. montre que :

$$\forall\, x \in ]0,1], \big|[T(f)]'(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty(\frac{x}{3} - 2x\ln x)$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}[T(f)]'(x) = 0$ et comme $T(f)$ est continue en 0, le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montre que $T(f)$ est dérivable en 0 avec

$$[T(f)]'(0) = \lim_{x\to 0}[T(f)]'(x) = 0$$

Donc $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. $T(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$ et $[T(f)]'(1) = -\displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$, donc :

$$T(f)(1) + [T(f)]'(1) = 0.$$

---

**Exercice 1.26.**

On considère la fonction $f$ de deux variables définie par :

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble $D$ de définition de $f$.

2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y) = 0$ est la réunion de deux segments et d'une courbe $C$ que l'on précisera.

3. Montrer que $D$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et que $D \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on pourra admettre cette question).

4. Étudier les extremums de $f$ sur $D$.
*(On pourra montrer que $f$ admet un minimum et un maximum et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$.)*

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est définie sur l'ensemble $D = \{(x,y) \mid 1 - x^2 - 2y^2 \geqslant 0\}$

2. L'équation $f(x,y) = 0$ admet comme solutions tous les couples $(x,y) \in D$ tels que :

$$x = 0, \text{ ou } y = 0, \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 1$$

Comme on sait également que $x^2+2y^2 \leqslant 1$, on obtient la réunion des segments $\{(0,y) \mid -1/\sqrt{2} \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{2}\}$, $\{(x,0) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ et de la courbe $C$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

3. On vérifie aisément que l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi $D$ est la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, N)$ : c'est donc un fermé borné.

De même $U = D \setminus C = \{(x,y) \mid N(x,y) < 1\}$. C'est la boule unité ouverte du même espace.

4. On a pour tout $(x,y) \in D$, $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$ et donc $f(-x,-y) = f(x,y)$. On peut donc se contenter de faire l'étude avec $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Par les théorèmes du cours, on sait qu'il existe au moins un couple $(A,B) \in D^2$ tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(A) \leqslant f(x,y) \leqslant f(B)$.

On vérifie que $(1/2, 1/2) \in U$ et que $f(1/2,1/2) > 0$ ; ainsi $\max\limits_D f > 0$ et par ce qui précède, $\min\limits_D f < 0$.

Les extremums de $f$ ne sont donc pas nuls et sont atteints en des points de l'ouvert $U$ et sont nécessairement des extremums locaux.

Par symétrie et compte tenu des résultats précédents, il suffit de chercher ces extrémums locaux sur l'ouvert $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2+2y^2 < 1\}$.

Pour tout $(x,y) \in U_1$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \times \dfrac{1 - 2x^2 - 2y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \times \dfrac{1 - x^2 - 4y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \end{cases}$$

Ainsi, sur $U_1$, les points critiques vérifient

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x,y) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$, avec en ce point $f(x,y) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Comme on trouve un seul point critique dans $U_1$, celui-ci correspond nécessairement à un extremum et en conclusion :

$f$ admet un maximum $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ atteint en $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ et en $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$ et un minimum qui vaut $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ atteint en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ et en $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$.

**Exercice 1.27.**

On administre à un patient $q$ unités d'un médicament. Après $t$ minutes la quantité de médicament active dans le sang est $q.\mathrm{e}^{-ct}$, où $c$ est une constante strictement positive. La même dose de médicament est injectée régulièrement toutes les $T$ minutes.

1. Déterminer la quantité $A(k)$ de médicament encore active dans le sang immédiatement après la $k^{\text{ème}}$ injection.

2. Calculer la borne supérieure de la quantité de médicament présente dans le sang après un nombre indéterminé d'injections. En déduire l'intervalle de temps le plus court à respecter entre deux doses pour que $A(k)$ ne dépasse pas un niveau $M > q$ donné.

3. On sait que si on administre une quantité $q$ de médicament, alors au bout de 2 heures la quantité de médicament encore active dans le sang est de $q/2$. On administre des doses de 50 mg. Sachant que la dose maximale supportée est de 500 mg, à quelle fréquence peut–on administrer le médicament en toute sécurité ?

**Solution :**

1. Juste après la $k$-ième injection, la dose de médicament présente dans le sang est :

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} q\mathrm{e}^{-ncT} = q\sum_{n=0}^{k-1} (\mathrm{e}^{-ct})^n = q\frac{1 - \mathrm{e}^{-kcT}}{1 - \mathrm{e}^{-cT}}$$

2. La suite $\big(A(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est la suite des sommes partielles d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-cT}$ appartenant à $[0, 1[$. Cette suite est donc croissante et convergente et a pour limite la somme de la série. Ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} A(k) = \frac{q}{1 - \mathrm{e}^{-cT}}$$

et ce nombre est le meilleur majorant de la suite $\big(A(k)\big)_{k\geqslant 0}$.

La dose de médicament ne dépassera pas $M$ si et seulement si $\dfrac{q}{1 - \mathrm{e}^{-cT}} \leqslant M$, inéquation équivalente à $T \geqslant -\frac{1}{c}\ln\left(1 - \frac{q}{M}\right)$.

3. Si la demi–vie du médicament est de 120 minutes, on a :

$$\mathrm{e}^{-120c} = \frac{1}{2}, \ i.e.\ c = \frac{\ln 2}{120}$$

L'intervalle minimal séparant deux injections successives est donc :

$$T_m = -\frac{120}{\ln 2}\ln\left(1-\frac{50}{500}\right) \simeq 18{,}24 \text{ mn}$$

Ainsi une prise de médicament toutes les 20 minutes sera satisfaisante.

---

**Exercice 1.28.**

1. Pour quelles valeurs réelles de $x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$ est-elle convergente ?

2. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$. On veut écrire $f(x)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k} + R_n(x)$, avec $R_n(x)$ à déterminer, en vue d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k.e^{-xt}\,dt$. Etablir la convergence de cette intégrale et donner sa valeur.

b) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k t^{k-1} + (-1)^n \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2}$$

c) En déduire que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k} + R_n(x)$, avec un $R_n(x)$ que l'on donnera sous forme d'une intégrale convergente.

d) Montrer que pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|R_n(x)| \leqslant (n+x)\dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$

3. En déduire une valeur approchée décimale de $f(100)$ à $10^{-6}$ près.

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Si $x \geqslant 0$ elle est majorée par $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale proposée est convergente.
Si $x < 0$, alors pour $t$ assez grand, cette fonction est minorée par 1 et la divergence de l'intégrale est triviale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt \text{ converge} \iff x \geqslant 0$$

2. a) La convergence est évidente et par le changement de variable $u = xt$, il vient :

$$I_k = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(k+1)}{x^{k+1}} = \frac{k!}{x^{k+1}}$$

b) Par l'identité géométrique, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$ :

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

Par dérivation :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k t^{k-1} = -\frac{1}{(1+t)^2} + (-1)^n \frac{(n+1)t^n(1+t) - t^{n+1}}{(1+t)^2}$$

Ce qui est le résultat demandé, aux positions des termes près.

c) Ainsi, toutes les intégrales rencontrées étant convergentes :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k I_{k-1} + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{e}^{-xt}dt$$

Soit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k} + R_n(x),$$

avec $R_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{e}^{-xt}dt$

d) $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}(nt^{n+1} + (n+1)t^n)\mathrm{e}^{-xt}dt = nI_{n+1} + (n+1)I_n$

Donc : $|R_n(x)| \leqslant n\dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}} + (n+1)\dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}(n+x)$

3. Avec $x = 100$, on veut $\dfrac{(n+1)!}{100^{n+2}}(n+100) \leqslant 10^{-6}$. On voit alors que ceci est réalisé pour $n \geqslant 3$ et donc :

$$f(100) \simeq \frac{1}{100} - \frac{2}{10000} + \frac{6}{1000000} = 0{,}009806$$

l'erreur commise étant majorée par $10^{-6}$.

---

**Exercice 1.29.**

Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x - \sin x$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x_n$ appartenant à $]n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $f(x_n) = 0$.

2. Donner un équivalent simple $u_n$ de $x_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n - n\pi]$.

---

**Solution :**

1. L'étude de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $I_n = ]n\pi, n\pi + \pi/2[$ est équivalente à l'étude de l'équation $g(x) = x - \tan x = 0$ sur le même intervalle. La fonction $x \mapsto g(x)$ y est de classe $C^1$ et $g'(x) = -\tan^2(x) < 0$.

La fonction $g$ est donc strictement décroissante sur $I_n$ et induit une bijection de $I_n$ sur $]n\pi, -\infty[$. Il existe donc un unique $x_n$ appartenant à $I_n$ tel que $g(x_n) = 0$, donc tel que $f(x_n) = 0$.

2. Comme $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2$, on a immédiatement $x_n \sim n\pi$.

3. Posons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n$. On sait déjà que $0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$.
On a $n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right) = \dfrac{1}{\tan(\varepsilon_n)}$.
Par conséquent $\tan(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} [x_n - n\pi] = \frac{\pi}{2}$$