1

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ strictement stochastique, ce qui signifie que les coefficients $p_{i,j}$ de P sont tous des réels *strictement* positifs et que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.
Bien que les coefficients de P soient réels, nous considérons dans la suite que P appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il s'ensuit que les valeurs propres de P sont éléments de $\mathbb{C}$ et que ses colonnes propres sont éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de P et donner l'exemple d'une colonne propre de P associée à 1.

2. Montrer que toute valeur propre λ de P est de module inférieur ou égal à 1.
On considérera une colonne propre de P associée à λ et on utilisera la norme infinie canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

3. Montrer que toute valeur propre λ de P de module égal à 1 est elle-même égale à 1 et que son sous-espace propre associé est une droite (à préciser).
On considérera une colonne propre C de P associée à λ telle que $\|C\|_\infty = 1$ et on montrera que les parties réelles des composantes de C sont toutes égales.

4. Montrer que toute matrice strictement stochastique appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable et préciser, en fonction de ses coefficients, ses valeurs propres ainsi qu'une base de colonnes propres.

5. Quelles sont les valeurs propres de la matrice strictement stochastique :

$$M_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

Est-elle diagonalisable ?

La matrice strictement stochastique $M_2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Soit Γ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont toutes les composantes sont égales à 1. On voit aisément que $P\Gamma = \Gamma$, donc 1 est valeur propre de P et Γ est une colonne propre associée à 1.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une colonne propre de P associée à λ. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} c_j$ et donc $|\lambda|.|c_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}|c_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}\|C\|_\infty = \|C\|_\infty$.
Il s'ensuit que $|\lambda|.\|C\|_\infty \leqslant \|C\|_\infty$ et comme $C0$, $|\lambda| \leqslant 1$.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une colonne propre de P associée à λ. Quitte à multiplier C par l'inverse de sa norme, on peut supposer que C est de norme 1.
Comme $\|PC\|_\infty = \|\lambda C\|_\infty = |\lambda|.\|C\|_\infty = 1$, il existe $k \in \{1, \dots, n\}$, tel que $\big|\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j} c_j\big| = 1$ et donc : $\exists\,\theta$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j} c_j = \mathrm{e}^{i\theta}$.
Ainsi $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}(1 - \mathrm{e}^{-i\theta} c_j) = 0$ et en particulier $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}(1 - \mathrm{R\acute{e}}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j)) = 0$.
Or, pour tout j, $\mathrm{R\acute{e}}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j) \leqslant |\mathrm{e}^{-i\theta} c_j| = |c_j| \leqslant 1$. La somme précédente ne peut donc être nulle que si tous ses termes sont nuls, c'est-à-dire :$\forall\, j, \mathrm{R\acute{e}}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j) = 1$. Or un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1 dont la partie réelle vaut 1 est le nombre 1 et pour tout j, $c_j = \mathrm{e}^{i\theta}$.
Donc C est colinéaire à Γ, ce qui prouve que $\lambda = 1$ et que le sous-espace propre de P associé à 1 est la droite de base Γ.

4. M est de la forme $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, avec a et b dans $]0, 1[$.
$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$(1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab = 0$$

et cette équation admet deux racines distinctes : 1 et $1-a-b$ et donc M est diagonalisable. Enfin, on voit aisément que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1, tandis que $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $1-a-b$.

5. $\star$ Les valeurs propres de M_1 sont 1 (et le sous-espace propre associé est une droite) et $-1/4$ et le sous-espace propre associé à $-1/4$ est la droite de base $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$: la matrice M_1 n'est pas diagonalisable.

$\star$ La matrice M_2 est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Exercice 2.2.

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,1]$.
Soit $u : f \in E \mapsto u(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1], u(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2. Soient f et g deux fonctions de E telles que $u(f) = g$.
   a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
   b) Calculer $g(0)$ et $g'(1)$.

3. Montrer que u est injectif.

4. Déterminer l'image Im u de u.

5. On pose, pour $x \in [0,1]$, $f_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $f_2(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.
   a) Vérifier que (f_1, f_2) est une famille libre de E.
   b) Soit F le sous espace vectoriel engendré par $\{f_1, f_2\}$. Montrer que F est stable par u.
   c) Donner dans la base (f_1, f_2) la matrice de la restriction à F de u.

Solution :

1. On a immédiatement

$$u(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

ce qui montre la continuité de $u(f)$ sur $[0,1]$, dès que f l'est elle même.
La linéarité de u provient de la linéarité de l'intégrale.

2. a) Comme, pour tout $x \in [0,1]$

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$$

g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et :

$$g'(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

De la même façon g est de classe C^2 et $g''(x) = -f(x)$.

b) $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$.

3. Soit $f \in \operatorname{Ker} u$. Pour tout $x \in [0,1]$, $u(f)(x) = 0$, ce qui donne en dérivant deux fois : $-f(x) = [u(f)]''(x) = 0$.
Ainsi u est injectif.

4. Par la seconde question, on sait que

$$\operatorname{Im} u \subseteq G = \{g \in C^2[0,1] \mid g(0) = 0, g'(1) = 0\}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in G$, alors $-g'' \in E$ et, en utilisant plusieurs intégrations par parties, il vient :

$$\begin{aligned} u(-g'')(x) &= -\int_0^x tg''(t)dt - x\int_x^1 g''(t)dt \\ &= [tg'(t)]_0^x + \int_0^x g'(t)dt - x\,[g'(t)]_x^1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

5. a) On pose $af_1(x) + bf_2(x) = 0$ et on donne à x deux valeurs particulières (par exemple, 1 et 3) pour obtenir $a = b = 0$.

b) Pour montrer la stabilité de F par u, il suffit de calculer les images de f_1 et f_2 par cet endomorphisme ; il vient :

$$u(f_1) = \frac{4}{\pi^2}f_1 \quad ; \quad u(f_2) = \frac{4}{9\pi^2}f_2$$

c) La matrice demandée s'en déduit immédiatement. C'est

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\pi^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{9\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^m est défini par :

$$u^0 = Id, \forall\, m \geqslant 1, u^m = u \circ u^{m-1}.$$

On note D l'application dérivation qui à tout $P \in E$ associe le polynôme dérivée P'.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\star) \text{ il existe } (k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tels que } f^k = D^m$$

1. Montrer que D est un endomorphisme surjectif de E. En déduire que f est un endomorphisme surjectif de E.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} D^m$.

3. Montrer que pour tout $p \in [\![0,k]\!]$, $\operatorname{Ker} f^p$ est de dimension finie.

4. Soit $p \in [\![0,k]\!]$ et φ l'application définie sur $\operatorname{Ker} f^p$ par $\varphi(P) = f(P)$.
   a) Montrer que φ est une application linéaire de $\operatorname{Ker} f^p$ dans $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.
   b) Déterminer son noyau et montrer que φ est surjective.
   c) Déterminer une relation entre la dimension de $\operatorname{Ker} f^p$ et celle de $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

5. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f^p$ en fonction de p et de la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la relation $(\star)$ soit vérifiée.

Solution :

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}[X]$. Alors $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ est un polynôme dont la dérivée est P. Ceci implique que l'application D est surjective.
L'application D étant surjective, D^m l'est également, ainsi donc que f^k.
Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = f^k(Q) = f(f^{k-1}(Q))$.
Ainsi l'application f est surjective.

2. Si $P \in \operatorname{Ker} D^m$, alors $P^{(m)} = 0$. Ceci entraîne que P est de degré inférieur ou égal à $m-1$. La réciproque est évidente. Finalement $\operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

3. On montre aisément que :

$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{m-1}[X]$$

Ce dernier espace étant de dimension m, chacun des noyaux est de dimension finie.

4. a) L'application φ étant l'application induite par f sur $\operatorname{Ker} f^p$, est linéaire.
Si $P \in \operatorname{Ker} f^p$, alors :

$$0 = f^p(P) = f^{p-1}(f(P)) = f^{p-1}(\varphi(P))$$

L'application φ est donc à valeurs dans $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

b) Si $\varphi(P) = 0$, alors, $P \in \operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f$.

Soit $Q \in \ker f^{p-1}$. L'application f étant surjective, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = f(P)$, et :

$$0 = f^{p-1}(Q) = f^p(P)$$

Ainsi $P \in \operatorname{Ker} f^p$, et φ est une application surjective.

c) Appliquons le théorème du rang à φ.

$$\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{rang}(\varphi) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} f^{p-1}$$

5. On sait donc que :

$$\dim \operatorname{Ker} f^p - \dim \operatorname{Ker} f^{p-1} = \dim \operatorname{Ker} f$$

Ainsi, par télescopage, $\dim \operatorname{Ker} f^p = p \times \dim \operatorname{Ker} f$.

6. Supposons qu'il existe (k, m) tels que $f^k = D^m$. Par la question précédente, $k \times \dim \operatorname{Ker} f = m$, et k divise m.

Réciproquement, si k divise m, il existe p tel que $m = pk$ et $D^m = (D^p)^k$. Il suffit de prendre $f = D^p$.

Exercice 2.4.

Pour tout $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients réels.

Dans cet exercice, n et p désignent deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1 et A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA = 0$ si et seulement si $A = 0$.

On suppose désormais que $A \neq 0$.

2. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont toutes deux diagonalisables dans une base orthonormée.

3. A tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on associe la norme : $\|X\|_r = \sqrt{{}^tXX}$.

a) Soit W un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ. Calculer $(\|AW\|_n)^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

b) En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls.

4. a) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker} A$ et que $\operatorname{Ker}(A\,{}^tA) = \operatorname{Ker}\ {}^tA$. En déduire que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont même rang.

c) Quelle relation existe entre les valeurs propres de ces deux matrices ?

Solution :

1. La matrice ${}^tAA$ est un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. L'égalité ${}^tAA = 0$ signifie que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), {}^tAAX = 0$.

Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = 0$, soit $||AX||^2 = 0$.
Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0$, donc $A = 0$.
La réciproque est évidente.

2. Les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont toutes deux symétriques réelles, et donc diagonalisables dans une base orthonormée.

3. a) Soit $W \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAAW = \lambda W$. En multipliant à gauche par ${}^tW$, il vient :

$$||AW||_n^2 = \lambda ||W||_p^2.$$

b) Ainsi la valeur propre λ vérifie :

$$\lambda = \frac{||AW||_n^2}{||W||_p^2} \geqslant 0$$

4. a) Soit λ une valeur propre non nulle de ${}^tAA$; il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que : $(\star)\quad {}^tAAX = \lambda X$.
Donc $A{}^tA(AX) = \lambda AX$.

- si $AX \neq 0$, alors AX un vecteur propre de $A{}^tA$ associé à la valeur propre λ.
- si $AX = 0$, la relation $(\star)$ entraîne que $\lambda X = 0$, et comme $X \neq 0$, ceci entraîne que $\lambda = 0$ en contradiction avec l'hypothèse de cette question.

Ainsi : $\lambda \in \mathrm{Spec}({}^tAA) \setminus \{0\} \implies \lambda \in \mathrm{Spec}(A{}^tA) \setminus \{0\}$

La démonstration de l'implication contraire est identique, en échangeant les rôles de A et ${}^tA$.

b) Soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$: alors ${}^tAAX = 0$, d'où ${}^tX{}^tAAX = 0$, ou $||AX||^2 = 0$, ce qui entraîne que $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}\, A$.

Réciproquement, si $AX = 0$, alors ${}^tAAX = 0$.
Ainsi :

$$\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}\, A.$$

La démonstration de $\mathrm{Ker}(A\,{}^tA) = \mathrm{Ker}({}^tA)$ est identique, en échangeant les rôles.

$\star$ La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang indique que : $p = \dim \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{rg}\, A$.

$\star$ La matrice ${}^tA$ représente une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Le théorème du rang indique que : $n = \dim \mathrm{Ker}({}^tA) + \mathrm{rg}({}^tA)$.

Or les matrices A et ${}^tA$ ont même rang. Ainsi, par la question précédente :

$$\mathrm{rg}({}^tAA) = p - \dim \mathrm{Ker}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}({}^tA) = \mathrm{rg}(A{}^tA)$$

c) Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles. Leurs spectres ne diffèrent donc éventuellement que de 0. Elles ont également même rang. La dimension du sous-espace propre associé à 0, lorsque 0 est valeur propre de l'une et/ou l'autre, est donc bien déterminé, dès que l'on connaît ce rang.

Exercice 2.5.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (x,0,y)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Soit $E = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer $f(E)$ et $f^{-1}(E)$.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution :

1. On a par définition

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1.

De même $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2 et est caractérisée par

$$\operatorname{Im} f = \{(x,0,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. E est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Il vient :

$$f(E) = \operatorname{Im}(f_{|E}) = \{(x,0,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Im} f$$

Enfin :

$$\begin{aligned} f^{-1}(E) &= \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \in E\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (x,0,y) \in E\} = \{(x,0,z)\} = f(E) \end{aligned}$$

3. Le noyau de f étant de dimension 1, on sait que $\lambda = 0$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker} f$.

Si λ est une valeur propre non nulle de f, $f(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$ est équivalent à

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ 0 = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases}$$

$\star$ Si $\lambda 1$, il vient $x = y = z = 0$ et λ n'est pas valeur propre.

$\star$ Si $\lambda = 1$, il vient $y = z = 0$ et 1 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension 1.

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.6.

Soient $n \geqslant 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (on confondra polynôme et fonction polynôme associée), $b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : E \to E, f \mapsto \varphi(f)$ défini par :

$$\varphi(f)(x) = (x-b)\big(f'(x) + f'(b)\big) - 2\big(f(x) - f(b)\big).$$

où f' désigne la dérivée du polynôme f.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer le plus grand entier k vérifiant :
$$\forall f \in E, \exists \delta \in E, \varphi(f)(x) = (x-b)^k \delta(x).$$

3. Déterminer le noyau et l'image de φ.

4. Déterminer, pour $k \geqslant 3$, $\varphi(f)$ lorsque $f(x) = (x-b)^k$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. La linéarité de φ est claire, par linéarité de la dérivation et propriétés des opérations et si $f \in \mathbb{R}_n[X]$, il en est de même de $\varphi(f)$.

2. Pour tout f, $\varphi(f)(b) = 0$.
On a : $[\varphi(f)]'(x) = f'(x) + f'(b) + (x-b)f''(b) - 2f'(x)$, donc $[\varphi(f)]'(b) = 0$.
De plus $[\varphi(f)]''(x) = -f''(x) + f''(b)$, donc $[\varphi(f)]''(b) = 0$.
Enfin $[\varphi(f)]^{(3)}(x) = -f'''(x)$, qui n'est pas nécessairement nul.
Ainsi b est racine au moins triple de $\varphi(f)$, mais n'est pas nécessairement racine d'ordre plus élevé.
L'entier k maximal tel que pour tout $f \in E$, $\varphi(f)(x) = (x-b)^k\delta(x)$ est $k = 3$.

3. D'après la question précédente, si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $f''' = 0$; donc
$$\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \mathbb{R}_2[X].$$
De même, si $g \in \operatorname{Im}\varphi$, alors $(x-b)^3$ divise g. Donc
$$\operatorname{Im}\varphi \subseteq F = \{P \in E \mid P(x) = (x-b)^3 Q(x)\}$$
Si l'une des deux inclusions précédentes était stricte, comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et $\dim F = n-2$, on aurait une contradiction vis à vis du théorème du rang. Ainsi :
$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_2[X], \qquad \operatorname{Im}\varphi = F$$

4. Un calcul immédiat donne pour $f(x) = (x-b)^k$ et pour $k \geqslant 3$,
$$\varphi(f)(x) = (k-2)f(x).$$
Le noyau de φ est de dimension 3 et $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles, chaque sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle étant de dimension au moins égale à 1.
Les sous-espaces propres de φ étant en somme directe, chaque sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est exactement de dimension 1 et ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n+1$ et φ est diagonalisable.

Exercice 2.7.

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ défini, dans la base canonique de cet espace, par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer $u \circ u \circ u$.

b) En déduire tous les sous-espaces de dimension 1 stables par u .

2. Soit P un plan stable par u et soit v la restriction de u à P.

a) Montrer que v n'est pas l'endomorphisme nul.

b) Montrer que $v \circ v = 0$.

c) Montrer qu'il existe x dans P tel que $\big(x, v(x)\big)$ est une base de P.

d) Comparer P et l'image de u. Conclure.

3. Déterminer tous les sous-espaces de E stables par u.

Solution :

1. a) Un calcul matriciel donne $u^3 = 0$.

b) La seule valeur propre de u est donc 0. On détermine alors le noyau de u qui est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc de dimension 1.

C'est le seul sous-espace stable de dimension 1, puisque si F est un tel sous-espace, et si x en est une base, alors $U(F) \subset F \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que F est un sous-espace propre.

2. a) Si v était identiquement nul, l'endomorphisme u aurait un noyau de dimension supérieure ou égale à 2, ce qui n'est pas le cas.

b) Supposons $v^2 \neq 0$: il existe $x \in P$ tel que $v^2(x) \neq 0$. Montrons que la famille $(x, v(x), v^2(x))$ est libre.

Si $ax + bv(x) + cv^2(x) = 0$, en appliquant v^2, il vient $a = 0$, puis en revenant au départ et en appliquant v, on obtient $b = 0$, enfin $c = 0$.

Or ces trois vecteurs sont éléments de P ; ceci est en contradiction avec la dimension de P et $v^2 = 0$.

c) Comme $v \neq 0$, il existe $x \in P$ tel que $v(x) \neq 0$. Une démonstration analogue à la démonstration précédente montre que $\big(x, v(x)\big)$ est une base de P.

d) On remarque d'abord que $\big(x, v(x)\big) \in \operatorname{Ker} u^2$ (question 2.b). Montrons ensuite que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^2$.

En effet, comme $u^3 = 0$, on a $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} u^2$. Enfin ces deux sous-espaces de E sont de dimension 2 (par le théorème du rang et parce que $u^2 \neq 0$).

Ainsi $P = \operatorname{Im} u$.

3. On vient de déterminer les sous-espaces stables de dimension 1 ($\operatorname{Ker} u$) et de dimension 2 ($\operatorname{Im} u$). Il reste les deux sous-espaces stables triviaux $\{0\}$ et E.

Exercice 2.8.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geqslant 2$ et soit u un endomorphisme de E .

1. Dans cette question uniquement on suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
 a) Montrer que $u \circ p = 0$.
 b) En déduire que $u \circ u = 0$.

2. Dans cette question uniquement on suppose que $u \circ u = 0$.
 a) Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$.
 b) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que : $\operatorname{Im}(u) \subset H \subset \operatorname{Ker}(u)$ et soit S un supplémentaire de H. Soit q la projection sur H parallèlement à S. Calculer $q \circ u - u \circ q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
Cette condition étant supposée remplie, y-a-t'il toujours unicité du projecteur p ?

4. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est égale à $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Solution :

1. a) $u = p \circ u - u \circ p \implies p \circ u = p^2 \circ u - p \circ u \circ p = p \circ u - p \circ u \circ p$, d'où :
$$p \circ u \circ p = 0$$
De même, $u \circ p = p \circ u \circ p - u \circ p^2 = -u \circ p$, d'où :
$$u \circ p = 0$$
 b) D'où $u = p \circ u$ et donc $u^2 = p \circ (u \circ p) \circ u = 0$.

2. a) Soit $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$ et $u(x) = u^2(z) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$, ce qui prouve l'inclusion demandée.
 b) On a $u \circ q = 0$ (car $H \subset \operatorname{Ker} u$) et pour tout $x \in E$, $q\big(u(x)\big) = u(x)$ (car $u(x)$ appartient à $\operatorname{Im} u$, donc à H). Ainsi :
$$q \circ u - u \circ q = u$$

3. Ce qui précède montre que la condition nécessaire et suffisante cherchée est $u^2 = 0$.

Il y a en général plusieurs façons de choisir H (si $\mathrm{Im}\, u \, \mathrm{Ker}\, u$), ce qui conduit à plusieurs choix du projecteur p.

4. Ici $D = \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}(2, 1)$. N'importe quel projecteur d'image D convient. On peut proposer celui dont la matrice est $\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.9.

Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$. On note $\mathcal{H}_p$ l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_p$ est un espace vectoriel réel de dimension p.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{H}_p$ par, pour tout $U = (u_n) \in \mathcal{H}_p$:

$$\varphi(U) = \sum_{k=0}^{p-1} u_k$$

est linéaire.

3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ converge.

On pose $f_U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Calculer $f_U(x)$ en fonction de $P_U(x)$ où $P_U = \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k X^k$.

En déduire que $f_U(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si $U \in \mathrm{Ker}\, \varphi$.

Solution :

1. $\mathcal{H}_p$ est l'ensemble des suites de période p.

- la suite identiquement nulle est un élément de $\mathcal{H}_p$: cet ensemble est donc non vide.
- on montre aisément que si U et V sont deux suites de période p, alors, pour tout scalaire λ, la suite $U + \lambda V$ est périodique de période p.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{H}_p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que :

$$T(U) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$$

Cette application est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels, ce qui montre que $\mathcal{H}_p$ est de dimension p. En effet :

- elle est trivialement linéaire ;
- si $T(U) = 0$, la suite U étant p-périodique, alors $U = 0$; ainsi T est injective ;

- toute suite p-périodique est entièrement déterminée par ses p premiers éléments $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$; ainsi T est surjective (notons d'ailleurs que ceci montre en une seule fois que T est bijective).

2. La linéarité de φ se déduit de la linéarité de l'application somme.

3. La suite U étant périodique, elle est bornée par $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |u_i|$. Ainsi, pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant 0$, $|u_n x^n| \leqslant M|x|^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $|x| < 1$.

La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ étant convergente, pour tout $x \in [0,1[$, on peut écrire :

$$f_U(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{kp} u_n x^n$$

Or, par p-périodicité :

$$\sum_{n=0}^{kp} u_n x^n = P_U(x)(1 + x^p + x^{2p} + \cdots x^{kp}) = P_U(x)\frac{1 - x^{(k+1)p}}{1 - x^p}$$

Ce qui entraîne que :

$$f_U(x) = \frac{P_U(x)}{1 - x^p}$$

- si $U \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $P_U(1) = 0$, ce qui entraîne que le polynôme P_U est divisible par $X - 1$.
Or, $1 - X^p = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1})$.
Après simplification par $x - 1$, le passage à la limite lorsque x tend vers 1 est alors licite et :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{P_U(x)}{1 - x^p} = \ell \in \mathbb{R}$$

- si $U \notin \operatorname{Ker}\varphi$, alors $P_U(1) \neq 0$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{x \to 1^-} \left|\frac{P_U(x)}{1 - x^p}\right| = +\infty.$$

Exercice 2.10.

Dans tout l'exercice on confond polynôme et fonction polynôme associée.
1. On considère l'application $\Phi : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(P,Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ qu'on notera $\langle\ ,\ \rangle$.
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle orthogonale pour ce produit scalaire ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme non nul A de degré a inférieur ou égal à n on note R_A l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme P, associe le reste de la division euclidienne de P par A.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $A(X) = 1 + X + X^2$.

Donner la matrice de R_A sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser le noyau et l'image de R_A.

3. Dans la suite, n est un entier supérieur ou égal à 2 et A un polynôme de degré a non nul.

a) Montrer que R_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que R_A est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image en en donnant des bases respectives.

c) Donner les valeurs propres de R_A ainsi que les sous-espaces propres associés.
Préciser les cas $a = 0$ et $a = n$.

4. a) On suppose que A n'admet pas de racine réelle dans $[0, 1]$.
Montrer alors que 1 et A ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

b) On suppose a est supérieur ou égal à 1 et que A admet une racine réelle x_0 appartenant à $[0, 1]$, c'est-à-dire que $A = (X - x_0)B$ où B est un polynôme de degré $a - 1$.
Montrer que B et $(X - x_0)^2B$ ne sont pas orthogonaux.

c) En déduire que si $a \neq 0$ et $a \neq n$, R_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Solution :

1. $\star$ Φ est bien définie, car une fonction polynôme est bornée sur $[0, 1]$ et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall\, t \in [0, 1], \dfrac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t}} \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-t}}$. La convergence de l'intégrale de la fonction majorante donne la convergence (absolue) de l'intégrale proposée.

$\star$ Φ est banalement bilinéaire symétrique et positive. Enfin le théorème de positivité de l'intégrale montre que si $\Phi(P, P) = 0$, alors le polynôme P s'annule en tout point de $[0, 1]$, donc est le polynôme nul.

$$\Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]$$

$\Phi(1, X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx > 0$, donc 1 et X ne sont pas orthogonaux.

2. On a :

$$\begin{cases} 1 = 0(1 + X + X^2) + 1 \\ X = 0(1 + X + X^2) + X \\ X^2 = 1(1 + X + X^2) - 1 - X \\ X^3 = (X - 1)(1 + X + X^2) + 1 \end{cases}, \text{ soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clairement $\operatorname{Ker} R_A$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $1 + X + X^2$ et $\operatorname{Im} R_A = \operatorname{Vect}(1, X)$

3. a) Si $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$, avec $\deg R_1 < a$ et $\deg R_2 < a$, alors, pour tout scalaire λ : $P_1 + \lambda P_2 = A(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$, avec $\deg(R_1 + \lambda R_2) < a$.

Ainsi $R_A(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = R_A(P_1) + \lambda R_A(P_2)$ et R_A est linéaire.

Enfin, comme $a \leqslant n$, R_A est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Comme $\deg(R_A(P)) < a$, on a $R_A(P) = 0.A + R_A(P)$ et par conséquent $R_A(R_A(P)) = R_A(P)$, donc $R_A \circ R_A = R_A$ et R_A est un projecteur.

Le noyau de R_A est formé des polynômes multiples de A et une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ est par exemple $(A, AX, AX^2, \ldots, AX^{n-a})$.

L'image de R_A est $\mathbb{R}_{a-1}[X]$, dont une base est $(1, X, \ldots, X^{a-1})$.

c) R_A étant un projecteur, ses valeurs propres ne peuvent être que 0 et 1, avec $E_{(0)} = \operatorname{Ker} R_A$ et $E_{(1)} = \operatorname{Im} R_A$, lorsque ces sous-espaces ne sont pas réduits au vecteur nul.

$\star$ Si $a = 0$, alors $R_A = 0$ et 0 est la seule valeur propre.

$\star$ Si $a = n$, alors $E_{(0)} = \operatorname{Vect}(A)$ et $E_{(1)} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. a) A garde un signe constant sur $[0,1]$, donc $\Phi(1, A) = \displaystyle\int_0^1 \frac{A(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt 0$ et $A \in \operatorname{Ker} R_A$, $1 \in \operatorname{Im} R_A$.

b) $(X - x_0)^2 B^2$ reste positif ou nul sur $[0,1]$, mais n'est pas le polynôme nul, donc : $\Phi(B, (X - x_0)^2 B) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t - x_0)^2 B^2(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt > 0$ et B et $(X - x_0)^2 B$ ne sont pas orthogonaux.

Or $(X - x_0)^2 B \in \operatorname{Ker} R_A$ et $B \in \operatorname{Im} R_A$, puisque $\deg B < \deg A$ et le degré de $(X - x_0)^2 B$ n'excède pas n.

c) Ainsi, sous les conditions imposées, dans tous les cas on a trouvé un vecteur de l'image et un vecteur du noyau non orthogonaux : R_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Exercice 2.11.

On rappelle que la donnée d'une fonction polynomiale sur $[0,1]$ définit entièrement cette fonction sur $\mathbb{R}$.

1. A toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}[X]$ on associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(P)(x) = \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

a) Rappeler pourquoi la famille $\mathcal{B} = (1, 1 - X, \ldots, (1 - X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'image par φ de $(1 - X)^p$.

c) Montrer que l'application $P \mapsto \varphi(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, préciser le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.

d) L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Quelles sont les valeurs propres éventuelles de φ ?

2. a) Soit F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ de base $\mathcal{B}'$ définie par :

$$\mathcal{B}' = \big((1-X), (1-X)^2, \ldots, (1-X)^{n+1}\big).$$

Montrer que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = F_n$.

Soit Ψ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble de départ et à F_n comme ensemble d'arrivée.

b) Écrire la matrice M_n de Ψ_n relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
En déduire que Ψ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur F_n. Déterminer M_n^{-1} ainsi que $\Psi_n^{-1}((1-X)^k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$.
Préciser les valeurs propres de M_n.

c) Soit k un entier tel que $2 \leqslant 2k \leqslant n$. Soit $P_k(X) = X^k(1-X)^k$.
Montrer que P_k est un élément de F_n. Le décomposer sur la base $\mathcal{B}'$.
Déterminer $\Psi_n^{-1}(P_k)$. En déduire les antécédents de P_k par φ.

Solution :

1. a) La famille $\mathcal{B} = \big(1, 1-X, \ldots, (1-X)^n\big)$ est à degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P_p(X) = (1-X)^p$. On a

$$\varphi(P_p)(x) = \sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{(1-t)^p}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

Cette intégrale est convergente, car la fonction à intégrer est $(1-t)^{p-\frac{1}{2}}$, qui est une fonction de référence (Riemann). Un calcul immédiat donne

$$\varphi(P_p)(x) = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+\frac{1}{2}}$$

c) La linéarité de φ est évidente et on vient de montrer que l'image d'un élément de la base $\mathcal{B}$ est un multiple de l'élément « suivant » de cette base.
φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Toujours par la question précédente, il vient $\deg \varphi(P) = \deg P + 1$.

d) Comme $\deg \varphi(P) = \deg P + 1$, l'application φ est injective. Par contre, elle n'est pas surjective, puisque $\mathbb{R}_0[X]$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} \varphi$.
Enfin, quel que soit λ réel, l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ n'a pas de solution non nulle, puisque :

$\star$ pour $\lambda 0$ et $P 0$, $\deg \varphi(P) = \deg P + 1 \deg P = \deg(\lambda P)$;

$\star$ pour $\lambda = 0$, l'équation $\varphi(P) = 0$ n'admet que la solution $P = 0$.

Ainsi : $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \varphi = \emptyset$.

2. a) Cela résulte du calcul fait en 1. b).

b) Et encore par les calculs faits en 1. b) :

$$M_n = \mathrm{diag}(\frac{1}{1/2}, \frac{1}{3/2}, \ldots, \frac{1}{n+1/2}) = \mathrm{diag}(2, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{2n+1})$$

Cette matrice est évidemment inversible, et :

$$M_n^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2})$$

Ainsi $\Psi_n^{-1}\big((1-X)^k\big) = \dfrac{2k-1}{2}(1-X)^{k-1}$. La matrice M_n étant diagonale, ses valeurs propres sont évidentes.

c) On a $P_k(1) = 0$ et P_k est de degré $2k \leqslant n$; ainsi $P_k \in F_n$.
On écrit alors :

$$P_k(X) = (1-X)^k X^k = (1-X)^k((1+(X-1))^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathrm{C}_k^i (1-X)^{k+i}$$

Donc :

$$\Psi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathrm{C}_k^i \frac{2(k+i)-1}{2}(1-X)^{k+i-1}$$

Pour terminer, on se rappelle que Ψ_n est la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble de départ et à F_n comme ensemble d'arrivée, ce qui permet d'achever la question.

Exercice 2.12.

Soit A la matrice d'ordre 3 définie par

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A

(on pourra utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).

b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soit e un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre -1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un réel $\lambda(u)$ tel que

$$u = \lambda(u)e + u', \text{ avec } \langle u', e\rangle = 0$$

Déterminer $\lambda(e)$.

3. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, f(u)\rangle = 0\}$.

a) Montrer que $u \in F$ si et seulement si $|\lambda(u)| = ||u'||$.

b) Soient $(u,v) \in F^2$. Montrer que $u+v \in F$ si et seulement si (u,v) est lié.

c) Quels peuvent être les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ?

Solution :

1. a) On s'aperçoit que $A - I = -\dfrac{2}{3}J$.

La matrice J vérifie $J^2 = 3J$. Ses valeurs propres sont donc incluses dans l'ensemble $\{0,3\}$. Or elle est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Comme $J0$ et $J3I$, ses valeurs propres sont exactement 0 et 3.

les valeurs propres de A sont alors ± 1.

Proposons une seconde méthode : la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. On s'aperçoit que ses colonnes sont deux à deux orthogonales et normées : c'est une matrice orthogonale. Elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont alors ± 1.
On pourrait également remarquer que $A^2 = I$.

b) Nous avons déjà répondu à cette question. Les sous-espaces propres de f sont

$$E_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \quad ; \quad E_{-1} = \{(x,y,z) \mid x=y=z\}$$

2. Le sous-espace propre E_{-1} est de dimension 1, engendré par exemple par le vecteur $(1,1,1)$. Il est orthogonal à E_1 qui est de dimension 2.
L'endomorphisme f étant diagonalisable, ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, tout vecteur u se décompose sous la forme :

$$u = \lambda(u)e + u', \text{ avec } \langle u', e\rangle = 0.$$

Comme $e = e + 0$, l'unicité de cette décomposition entraîne $\lambda(e) = 1$.

3. On remarquera que F n'est pas un sous-espace vectoriel.

a) Soit $u \in F$. Alors

$$\langle \lambda(u)e + u', -\lambda(u)e + u'\rangle = 0$$

Et comme $\langle e, u'\rangle = 0$, cela est équivalent à $\lambda(u)^2 = ||u'||^2$.

b) Dire que $u+v \in F$ signifie que $\langle u+v, f(u)+f(v)\rangle = 0$. Comme $u \in F$ et $v \in F$, ceci est équivalent à :

$$\langle u, f(v)\rangle + \langle v, f(u)\rangle = 0$$

ou, par un calcul immédiat :

$$-2\lambda(u)\lambda(v) + 2\langle u', v'\rangle = 0$$

Or les hypothèses de la question sont équivalentes à :

$$|\lambda(u)| = ||u'|| \quad ; \quad |\lambda(v)| = ||v'||$$

Ainsi $u + v \in F$ est équivalent à $|\langle u', v'\rangle| = ||u'|| \cdot ||v'||$, c'est-à-dire le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Les vecteurs u' et v' sont donc liés. Écrivons alors : $v' = \alpha u'$.
On a

$$\lambda(u)\lambda(v) = \alpha\langle u', u'\rangle = \alpha(\lambda(u))^2$$

Si on avait $\lambda(u) = 0$, alors on aurait $u = u'$, avec $||u'|| = |\lambda(u)| = 0$, donc $u = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $\lambda(u)0$ et en simplifiant : $\lambda(v) = \alpha\lambda(u)$, ce qui entraîne que u et v sont liés.
La réciproque est évidente.

c) On déduit de la question précédente que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ne peuvent être que des droites vectorielles.

Exercice 2.13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Phi : P \longmapsto X(1-X)P'' + (1-2X)P'$$

Pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on considère le polynôme $U_p = X^p(1-X)^p$ et $L_p = \dfrac{1}{p!}(U_p)^{(p)}$, où $(U_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de U_p.

1. Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner la matrice de Φ relativement à sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

2. Donner les valeurs propres de Φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Calculer le degré et le coefficient dominant de L_p.

4. On pose $L_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \ell_{p,k} X^k$. Démontrer que :

$$\ell_{p,k} = (-1)^k C_p^k C_{p+k}^k$$

5. a) Trouver une relation de récurrence entre $\ell_{p,k}$ et $\ell_{p,k+1}$.

b) Écrire un programme Pascal permettant d'obtenir les coefficients de L_p. En voici l'entête :

```
Program Calcul ;
Const Deg_Max = 100 ;
Type Polynome = Array[0..Deg_Max] Of LongInt ;
Procedure Calcul_Lp(
```

6. Montrer que L_p est vecteur propre de Φ.

Solution :

1. La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétés des opérations. D'autre part, si $\deg P = k \leqslant n$, alors $\deg \Phi(P) \leqslant k \leqslant n$, donc Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(X^k) &= X(1-X)k(k-1)X^{k-2} + (1-2X)kX^{k-1}\\ &= -k(k+1)X^k + k^2X^{k-1},\end{aligned}$$

tandis que $\Phi(1) = 0$ et $\Phi(X) = -2X + 1$, d'où :

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & -2 & 4 & & & \\ & & -6 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & n^2 \\ & & & & & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

Les coefficients $m_{i,j}$ tels que $i > j$ ou $j > i+1$ étant tous nuls.

2. M est trigonale supérieure, ses valeurs propres sont donc en évidence sur la diagonale, il s'agit des nombres deux à deux distincts : $-k(k+1)$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ admet $n+1$ valeurs propres, donc est diagonalisable.

3. $U_p = (-1)^p X^{2p} + \cdots$, donc $U_p^{(p)} = (-1)^p(2p)(2p-1)\dots(p+1)X^p + \cdots$,
Par conséquent L_p est de degré p et de coefficient dominant :

$$(-1)^p\frac{(2p)!}{p!p!} = (-1)^p\mathrm{C}_{2p}^p$$

4. On a $U_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k(-1)^k x^{p+k}$ et comme $x \mapsto \dfrac{i!}{(i-p)!}x^{i-p}$ est la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto x^i$ (pour $i \geqslant p$), il vient :

$p!L_p(x) = \sum\limits_{i=0}^{p} \mathrm{C}_p^i(-1)^i\dfrac{(i+p)!}{i!}\,x^i$, soit :

$$\forall\, k \in [\![0,p]\!], \ell_{p,k} = (-1)^k\mathrm{C}_p^k\mathrm{C}_{p+k}^k$$

5. a) Le retour aux factorielles donne, pour $k < p$:

$$\ell_{p,k+1} = -\frac{(p-k)(p+k+1)}{(k+1)^2}\,\ell_{p,k}$$

b)

```
Program Calcul ;
Const Deg_Max = 100 ;
Type Polynome = Array[0..Deg_Max] Of LongInt ;
Procedure Calcul_Lp(Var L :polynome ; p :integer) ;
   Var k :integer
   Begin
     L[0] :=1 ;
     For k :=0 to p-1 do
```

```
    L[k+1] :=(-(p-k)*(p+k+1)*L[k]/((k+1)*(k+1)) ;
  End ;
```

6. On a, pour tout p : $(X-X^2)U_p' = p(1-2X)U_p$ et en dérivant $p+1$ fois, grâce à la formule de Leibniz :

$$(X-X^2)U_p^{(p+2)} + (p+1)(1-2X)U_p^{(p+1)} - p(p+1)U_p^{(p)} = p(1-2X)U_p^{(p+1)} - 2p(p+1)U_p^{(p)}$$

En divisant par $p!$, et en simplifiant il reste :

$$\Phi(L_p) = -p(p+1)L_p$$

Exercice 2.14.

1. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f_A l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f_A(X) = XA$.

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer M sa matrice associée dans la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la trace de f_A (ou de M). (La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale et on rappelle que deux matrices semblables ont la même trace).

c) Montrer que f_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer f_A^{-1}.

2. On souhaite maintenant généraliser la question précédente. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$.

Soit C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_C l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_C(X) = XC$.

a) Montrer que si C est p-nilpotente (c'est-à-dire si $C^p = 0$) il en est de même pour f_C.

b) Déterminer la trace de f_C (on pourra commencer par calculer $f_C(E_{i,j})$).

c) Montrer que f_C est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si C est inversible.

Solution :

1. a) f_A est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même et sa linéarité est évidente.

On a : $f_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2}$;

$$f_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_{1,1} + 4E_{1,2}\ ;$$

$$f_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = E_{2,1} + 2E_{2,2}\ ;$$

$$f_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 3E_{2,1} + 4E_{2,2}\ ;$$

$$M(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) D'où : $\operatorname{tr}(f_A) = 10 = 2\operatorname{tr}(A)$.

c) la matrice précédente est inversible, d'inverse : $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) On a $f_C^2(X) = f_C(XC) = (XC)C = XC^2$ et, par récurrence $f_C^p(X) = XC^p$. Ainsi si $C^p = 0$, alors $f_C^p = 0$ et f_C est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) La matrice $f_C(E_{i,j}) = E_{i,j}C$ a toutes ses lignes nulles, sauf sa i-ième où on effectue une recopie de la j-ième ligne de C. En notant $C = (c_{i,j})$, on a donc :

$$f_C(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}E_{i,k}$$

Ainsi la coordonnée de $f_C(E_{i,j})$ sur $E_{i,j}$ vaut $c_{j,j}$ et :

$$\operatorname{tr}(f_C) = \sum_{i,j} c_{j,j} = n\operatorname{tr}(C)$$

c) $\star$ Si C est inversible, alors on peut définir $f_{C^{-1}}$ et :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_{C^{-1}} \circ f_C(X) = (XC)C^{-1} = X,\ i.e.\ f_{C^{-1}} \circ f_C = id$$

On peut vérifier que l'on a aussi $f_C \circ f_{C^{-1}} = id$, mais c'est inutile puisque l'on manipule des endomorphismes d'un espace de dimension finie n^2.

Bref si C est inversible, alors $f_C \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Réciproquement, supposons que $f_C \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f_C(D) = I_n$, c'est-à-dire telle que $DC = I_n$, ce qui prouve que C est inversible, d'inverse D.

Exercice 2.15.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x \mid y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note par $\|x\|$ la norme euclidienne du vecteur x (ainsi $\|x\|^2 = \langle x \mid x \rangle$). Si E est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on désigne par $E^\perp$ le sous espace des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un unique vecteur y appartenant à $(\mathrm{Ker}(A))^\perp$ tel que $Bx = Ay$. On notera $u(x)$ cet unique vecteur y.

b) Vérifier que l'application u ainsi définie est linéaire. On notera X sa matrice.

c) Montrer que X est l'unique matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$B = AX,\ \mathrm{Ker}\, X = \mathrm{Ker}\, B \text{ et } \mathrm{Im}(X) \subseteq (\mathrm{Ker}\, A)^\perp.$$

On appelle cette solution X la *solution réduite* de l'équation $AY = B$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $AY = B$, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, admet au moins une solution si et seulement si $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$. A quelle condition cette équation admet-elle une unique solution ?

3. Dans cette question, on se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que l'équation $AY = B$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet des solutions.

b) Déterminer la solution réduite de cette équation.

Solution :

Dans tout cet exercice, on confond vecteur de $\mathbb{R}^p$ et matrice colonne canoniquement associée.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}^p$, comme $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}\, A$, on voit qu'il existe $a \in \mathbb{R}^p$ tel que $Bx = Aa$.

Décomposons le vecteur a selon la somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}^p = (\mathrm{Ker}\, A) \oplus (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$$

sous la forme $a = b + y$, il vient $Bx = Ay$.

De plus, si $y_1 \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$ est tel que $Bx = Ay_1$, on voit que le vecteur $y - y_1$ appartient à l'espace $\mathrm{Ker}\, A \cap (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$ et par conséquent est nul.

L'existence et l'unicité sont donc prouvées.

b) La linéarité de X s'obtient en utilisant l'unicité du vecteur $y = Xx$ dans $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ tel que $Bx = Ay$.

c) Si $Xx = 0$, il est clair que $Bx = AXx = 0$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} B$, on a $Bx = 0 = A0$ et par conséquent $Xx = 0$ ($0 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$). On a donc $\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} B$ et X vérifie bien toutes les conditions demandées.

Maintenant, si Y satisfait $AY = B$, avec $\operatorname{Ker} Y = \operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} Y \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $Xx - Yx \in (\operatorname{Ker} A)^\perp \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$. Il en résulte que l'on a $X = Y$, ce qui prouve l'unicité de la solution réduite.

2. Lorsque $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$, on obtient avec la question 1. une solution de l'équation $AY = B$.
Réciproquement, il est clair que l'existence d'une matrice Y telle que $AY = B$ entraîne l'inclusion $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.
De plus, on remarque qu'il y a une unique solution si et seulement si la matrice A (*i.e.* l'endomorphisme canoniquement associé) est injective, donc bijective.

3. a) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On observe facilement que :

$$Be_1 = A(e_1 + e_2),\ Be_2 = A(e_2 + e_3) \text{ et } Be_3 = A(e_1 + e_3)$$

D'où $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$ et par conséquent l'équation proposée admet des solutions. Il y en a plusieurs car la matrice A n'est pas injective.

b) On trouve $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Vect}(u, v)$, avec $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il existe donc deux réels α et β tels que $Xe_1 = \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. D'où :

$$Be_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = AXe_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, d'où $Xe_1 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deux systèmes du même type permettent de trouver $Xe_2 = u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $Xe_3 = \frac{1}{3}(u + v) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

1. On rappelle que $\forall \theta_1 \in \mathbb{R},\ \forall \theta_2 \in \mathbb{R},\ \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$.

Soit $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ deux nombres complexes non nuls.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur θ_1 et θ_2 pour que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Généraliser à n nombres complexes ($n \geqslant 3$), c'est-à-dire, si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pour que :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$$

On suppose de plus que $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a) Montrer que le réel 1 est valeur propre de A.

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$, et si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.

3. On suppose la matrice A diagonalisable. Que peut-on dire de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. $\star$ On a :
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned}
&\iff (\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2)^2 + (\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2)^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\
&\iff \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\
&\iff \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \text{ (car } \rho_1 0 \text{ et } \rho_2 0) \\
&\iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument modulo } 2\pi.
\end{aligned}$$

Le résultat reste valable si z_1 ou z_2 est nul, puisqu'alors son argument est quelconque.

Supposons alors que pour $n-1$ nombres complexes, le module de la somme soit égal à la somme des modules si et seulement si ces $n-1$ nombres ont le même argument modulo 2π, et considérons n nombres complexes tels que l'on ait :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Alors : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |z_k| + |z_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\Big| \leqslant \Big|\sum\limits_{k=1}^{n-1} z_k\Big| + |z_n|$

Par conséquent $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |z_k| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{n-1} z_k\Big|$ et les $n-1$ nombres complexes $z_1, \dots, z_{n-1}$ ont le même argument modulo 2π. On peut donc écrire $z_1 = \rho_1 \mathrm{e}^{i\theta}, \dots, z_{n-1} = \rho_{n-1}\mathrm{e}^{i\theta}$ et en posant $z' = z_1 + \cdots + z_{n-1} = (\rho_1 + \cdots + \rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}$, l'hypothèse devient :

$$|z' + z_n| = |z'| + |z_n|$$

et donc z_n a même argument que z'. Finalement tous les nombres ont même argument, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang n.

On conclut par le principe de récurrence.

2. a) Si C est la colonne dont tous les coefficients valent 1, on a $AC = C$ et 1 est bien valeur propre de A.

b) $\star$ Soit λ une valeur propre de A (a priori complexe) et $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une colonne propre (donc non nulle) associée. On a :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Soit i tel que $|x_i| = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$, comme $C0$, on a $|x_i| > 0$ et :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \implies |\lambda|.|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \text{ (les } a_{i,j} \text{ sont des réels positifs)}$$

Ainsi, par le choix de l'indice i :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{|x_j|}{|x_i|} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

$\star$ Si $|\lambda| = 1$, les inégalités précédentes sont des égalités et comme les $a_{i,j}$ sont **strictement** positifs : $\forall\, j \in [\![1, n]\!], |x_j| = |x_i|$ et :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = |\lambda| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\Big| = \sum_{j=1}^{n} \Big|a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\Big|$$

Ainsi tous les nombres $a_{i,j} \dfrac{x_j}{x_i}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ ont le même argument, soit celui de $a_{i,i} \dfrac{x_i}{x_i}$, *i.e.* 0. Ayant le même module et le même argument, tous les x_j sont égaux et la colonne C est propre pour la valeur propre 1 , soit $\lambda = 1$.

3. Si A est diagonalisable, il existe P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D.$$

Alors $A^p = PD^pP^{-1}$ et quitte à renuméroter les valeurs propres, on peut supposer $\lambda_1 = 1$ et $\forall\, k > 1, |\lambda_k| < 1$ (en effet A est diagonalisable et le sous-espace propre associé à 1 est la droite engendrée par la colonne dont tous les coefficients valent 1).

Par conséquent la suite (A^p) converge (la convergence s'entendant coefficient par coefficient) et sa limite est la matrice $P\,\text{diag}(1, 0, \dots, 0)P^{-1}$ qui est la matrice d'un projecteur de rang 1.

Exercice 2.17.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ \mid\ \rangle$. Dans les questions 1. et 2. on ne suppose pas que E est de dimension finie.

1. Soit f une **application** de E dans E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x)|y\rangle = -\langle x|f(y)\rangle$

(ii) : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E,\ \langle f(x)|x\rangle = 0$. ($\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.)

f est dite antisymétrique si et seulement si elle vérifie (i) ou (ii).

2. Soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) et f antisymétrique.

a) Montrer que $\text{Ker}\, f$ est orthogonal à $\text{Im}\, f$.

b) On pose $s = f \circ f$. Montrer que

- s est symétrique (c'est-à-dire, $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle$),
- toute valeur propre de s est réelle et négative ou nulle et $\text{Im}\, s \subset \text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, s = \text{Ker}\, f$.

3. On suppose que E est de dimension finie et l'on considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Montrer qu'un endomorphisme f de E est antisymétrique si et seulement si la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tA = -A$.

Solution :

1. ii) $\implies$ i). En effet, $\forall (x, y) \in E^2$:

$$0 = \langle f(x+y), x+y\rangle = \langle f(x) + f(y), x+y\rangle$$
$$= \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle = \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle$$

On a donc bien : $\langle f(x), y\rangle = -\langle f(y), x\rangle$.

i) $\implies$ ii).

Montrons déjà que f est linéaire. Soit $(x, y, z) \in E^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\delta = \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), z\rangle = \langle f(\alpha x + y), z\rangle - \alpha\langle f(x), z\rangle - \langle f(y), z\rangle$$

et en utilisant la propriété i) :

$$\delta = -\langle \alpha x + y, f(z)\rangle + \alpha\langle x, f(z)\rangle + \langle y, f(z)\rangle = \langle \alpha x + y - (\alpha x + y), f(z)\rangle = 0.$$

Ainsi, pour tout z, $\langle f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y),z\rangle=0$ et donc :

$$f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)=0$$

Ceci étant vrai pour tout $x,y\in E$ et tout scalaire α, f est bien linéaire.

On a alors, grâce à i) : $\forall x\in E, \langle f(x),x\rangle=-\langle x,f(x)\rangle$ et donc $\langle f(x),x\rangle=0$.

2 a) Soit $x\in \operatorname{Ker} f$ et $z\in \operatorname{Im} f$, il existe $y\in E$ tel que $z=f(y)$ et :

$$\langle x,z\rangle=\langle x,f(y)\rangle=-\langle f(x),y\rangle=-\langle 0,y\rangle=0$$

Ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f$ est orthogonal à $\operatorname{Im} f$.

b) • En utilisant deux fois i), pout tout $(x,y)\in E^2$:

$\langle s(x),y\rangle=\langle f(f(x)),y\rangle=-\langle f(x),f(y\rangle=+\langle x,f(f(y))\rangle=\langle x,s(x)\rangle$.

L'endomorphisme s est bien symétrique.

• Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé :

$\|f(x)\|^2=\langle f(x),f(x)\rangle=-\langle x,f(f(x))\rangle=-\langle x,s(x)\rangle=-\lambda\langle x,x\rangle=-\lambda\|x\|^2$, et donc $\lambda\in\mathbb{R}^-$.

• $s=f\circ f$, donc clairement $\operatorname{Im} s\subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f\subset \operatorname{Ker} s$.

• Soit $x\in \operatorname{Ker} s$, alors : $0=\langle s(x),x\rangle=-\langle f(x),f(x)\rangle=-\|f(x)\|^2$. Ainsi $f(x)=0$ et $x\in \operatorname{Ker} f$.

Finalement, on a $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} s$.

3. Soit $A=(a_{i,j})$ la matrice de f relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\langle f(e_j),e_i\rangle=\langle\sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k,e_i\rangle=a_{i,j}$$

⋆ Si f est antisymétrique, $\langle f(e_j),e_i\rangle=-\langle e_j,f(e_i)\rangle$, soit $a_{i,j}=-a_{j,i}$ et A est antisymétrique.

⋆ Si A est antisymétrique, pour tout $(x,y)\in E^2$, en notant X et Y les matrices colonnes associées relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\langle f(x),y\rangle={}^t(AX)Y={}^tX(-A)Y=-{}^tX(AY)=-\langle x,f(y)\rangle$$

et f est bien antisymétrique.

Exercice 2.18.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_n$ définis par $P_0=1$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_{n+1} est la primitive de P_n pour laquelle on a $\displaystyle\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)\mathrm{d}t=0$.

1. Déterminer P_1.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si P_n est une fonction impaire, il en est de même de P_{n+2}.
En déduire que pour tout n impair différent de 1, $P_n(1)=0$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\mathrm{d}t \;=\; 2P_{n+1}(1)$$

4. On considère sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, l'application :

$$\phi \;:\; (P,Q) \;\longmapsto\; \phi(P,Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

5. Soient m et n deux entiers vérifiant $m \geqslant n > 0$. Justifier les égalités :

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}P_{m+n}(1) \text{ et } \phi(P_n, P_0) = 0$$

6. On pose $E_n = \mathrm{Vect}\{P_{2k}, 0 \leqslant 2k \leqslant n\}$ et $F_n = \mathrm{Vect}\{P_{2k+1}, 0 \leqslant 2k{+}1 \leqslant n\}$. Montrer que E_n et F_n sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. P_1 est de la forme $P_1(t) = t + a$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t+a)\,dt = 0 \iff a = 0$, donc $P_1(t) = t$.

2. Remarquons que pour $n \geqslant 2, P_n(1) - P_n(-1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)\,dt = 0$.

Supposons P_n impair, alors P_{n+1} (primitive de P_n) est pair et P_{n+2} est de la forme $Q + b$, où Q est un polynôme impair et b une constante. La nullité de l'intégrale sur $[-1,1]$ impose alors $b = 0$ et P_{n+2} est impair. Comme P_1 est impair, on conclut par le principe de récurrence : pour tout n impair, P_n est impair (et donc si n est pair P_n, qui est une primitive de P_{n-1} est pair).

Pour n impair, on a donc $P_n(-1) = -P_n(1)$ et comme on a remarqué que pour $n \geqslant 2$, $P_n(-1) = P_n(1)$, il vient :

$$n \text{ impair} \geqslant 2 \implies P_n(1) = 0$$

3. Pour $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et en intégrant par parties :

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\,dt = \big[tP_{n+1}(t)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)\,dt = P_{n+1}(1) + P_{n+1}(-1)$$

Soit, compte tenu de la remarque faite au début de la question 2. :

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\,dt = 2.P_{n+1}(1)$$

4. On vérifie facilement que ϕ est un produit scalaire (produit scalaire de référence).

5. Intégrons par parties, en dérivant P_n en P_{n-1} et en intégrant P_m en P_{m+1} :

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = \Big[P_n(t)P_{m+1}(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt$$

Si $n \geqslant 2$, on a *a fortiori* $m+1 \geqslant 2$ et le crochet de l'intégration par parties s'évanouit, soit :

$$\phi(P_n, P_m) = -\phi(P_{n-1}, P_{m+1})$$

D'où, par récurrence : $\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}\phi(P_1, P_{m+n-1})$, évidemment valable pour $n = 1$.

D'après la question 3. on a donc :

$$m \geqslant n \geqslant 1 \implies \phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} P_{m+n}(1).$$

Enfin

$$2\phi(P_n, P_0) = \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(-1) = 0, \text{ puisque } n+1 \geqslant 2.$$

6. E_n et F_n sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$ (car la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degrés, donc est une base de cet espace). Il reste à vérifier que pour tout k et tout j, P_{2k} et P_{2j+1} sont ϕ-orthogonaux. Or :

$\star$ d'après 5. $\phi(P_0, P_{2j+1}) = 0$;

$\star$ et pour $k \geqslant 1$, d'après 5. et 2., $\phi(P_{2k}, P_{2j+1}) = (-1)^{2k-1} P_{2(k+j)+1}(1) = 0$.

Ce qui achève la vérification.

Exercice 2.19.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, avec $A_n = (a_{i,j}(n))$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, la suite $n \mapsto a_{i,j}(n)$ converge vers $\ell_{i,j}$.
On note alors $L = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geqslant 2$. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \vdots \\ \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$, avec :

$U_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} \\ \vdots \\ \alpha_{p,0} \end{pmatrix}$ est donnée et pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout k de $[\![1,p]\!]$:

$$\alpha_{k,n+1} = \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} \alpha_{i,n}$$

1. a) Pour tout n on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{k,n}$. Exprimer s_n en fonction de s_0.

b) Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, en déduire une relation entre $\alpha_{k,n+1}$ et $\alpha_{k,n}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On note J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les termes valent 1 et on pose $A = J - I_p$, où I_p est la matrice unité d'ordre p.

a) Exprimer U_{n+1} à l'aide de A et U_n.

b) A l'aide des résultats de la question 1., déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) En déduire la convergence de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

ainsi que la limite de cette suite.

Solution :

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n+1} = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\neq k} \alpha_{i,n} = \frac{p-1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} = s_n$$

Donc la suite (s_n) est constante et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0$.

b) D'où : $\alpha_{k,n+1} = \dfrac{1}{p-1}(s_n - \alpha_{k,n}) = \dfrac{1}{p-1}(s_0 - \alpha_{k,n})$.

c) Pour tout k fixé, la suite $n \mapsto \alpha_{k,n}$ est donc arithmético-géométrique, de raison $-\dfrac{1}{p-1}$ et de point fixe $\dfrac{s_0}{p}$.

$\star$ Si $p \geqslant 3$, la suite $(\alpha_{k,n})_n$ converge vers $\dfrac{s_0}{p}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \begin{pmatrix} s_0/p \\ \vdots \\ s_0/p \end{pmatrix}$$

$\star$ Si $p = 2$, on a $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, etc. Par conséquent la suite $(U_n)_n$ converge si et seulement si $a = b$.

2. a) Clairement $U_{n+1} = \dfrac{1}{p-1} A U_n$.

b) Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \big(\dfrac{1}{p-1}\big)^n A^n U_0$.

Or, comme : $\alpha_{k,n} - \dfrac{s_0}{p} = \big(-\dfrac{1}{p-1}\big)^n (\alpha_{k,0} - \dfrac{s_0}{p})$, il vient :

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{p}\big[1 - (-\frac{1}{p-1})^n\big] \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,0} + (-\frac{1}{p-1})^n \alpha_{k,0}$$

C'est-à-dire $U_n = B_n U_0$, avec $B_n = \dfrac{1}{p}\big[1 - (-\dfrac{1}{p-1})^n\big] J + (-\dfrac{1}{p-1})^n I_p$.

Ainsi, quel que soit U_0, on a $\big[\big(\dfrac{1}{p-1}\big)^n A^n - B_n\big] U_0 = 0$, soit $A^n = (p-1)^n B_n$ et finalement :

$$A^n = (-1)^n I_p + \frac{1}{p}[(p-1)^n - (-1)^n]J$$

c) Par conséquent : $M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_p + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{(p-1)^k - (-1)^k}{k!} J$.

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, le passage à la limite est légitime et donne :

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \mathrm{e}^{-1} I_p + \frac{1}{p}[\mathrm{e}^{p-1} - \mathrm{e}^{-1}]J$$

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{2n})$.
Si $P \in E$, P' désigne le polynôme dérivé de P.

On considère Φ définie sur E par :

$$\Phi(P)(X) = \big(\frac{1}{4} - X^2\big)P'(X) + 2nXP(X)$$

1. Vérifier que Φ définit un endomorphisme de E.

2. a) Soit λ entier relatif tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant n$. Déterminer (α, β) de $\mathbb{N}^2$ pour que le polynôme $P(X) = \big(X + \frac{1}{2}\big)^{\alpha}\big(X - \frac{1}{2}\big)^{\beta}$ de E vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.

b) En déduire les valeurs propres et les polynômes propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

3. Déterminer la matrice A de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

4. Déterminer une matrice A' dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \ldots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Construire un endomorphisme Λ de E tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant $0, 1, 4, 9, \ldots, (2n)^2$ comme valeurs propres.

Solution :

1. La linéarité de Φ est claire, et :

$\star$ $\Phi(1) = 2nX$ (où 1 désigne le polynôme constant égal à 1) ;

$\star$ Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\Phi(X^k) = (2n-k)X^{k+1} + \frac{k}{4}X^{k-1}$.

Ainsi :

$$\Phi(X^{2n}) = \frac{n}{2}X^{2n-1} \text{ et pour } k \in [\![1, 2n-1]\!], \deg \Phi(X^k) = k+1 \leqslant 2n.$$

Par conséquent Φ est bien une application de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ vers lui-même et est donc un endomorphisme de cet espace.

2. a) Soit $P = \big(X + \frac{1}{2}\big)^{\alpha}\big(X - \frac{1}{2}\big)^{\beta}$, le calcul donne :

$$\Phi(P) - \lambda P = \Big(-(\alpha+\beta)X + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2nX - \lambda\Big)P$$

Ceci est le polynôme nul si et seulement si $\alpha+\beta = 2n$ et $\alpha-\beta = 2\lambda$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = n+\lambda$ et $\beta = n-\lambda$.

Ces deux nombres étant bien des entiers naturels et leur somme n'excédant pas $2n$, on conclut :

$$\big(X+\frac{1}{2}\big)^{n+\lambda}\big(X-\frac{1}{2}\big)^{n-\lambda} \text{ est propre pour la valeur propre } \lambda$$

b) On connaît donc $2n+1$ valeurs propres de l'endomorphisme Φ. Comme l'espace est de dimension $2n+1$, on les connaît toutes et chaque sous-espace propre est de dimension 1, donc engendré par le polynôme trouvé à la question précédente.

Ainsi l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

3. Les calculs ont été faits en 1. et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2n & 0 & 2/4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 2n/4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Les valeurs propres de A sont $-n, -n+1, \dots, n-1, n$, donc les valeurs propres de $A' = A + nI_{2n+1}$ sont $0, 1, \dots, 2n$, et A' a tous ses coefficients diagonaux égaux.

Ainsi $A' = A + nI_{2n+1}$ convient.

5. A'^2 a pour valeurs propres $0, 1, 4, \dots, (2n)^2$.

Donc l'endomorphisme associé à cette matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ convient.

Cet endomorphisme n'est autre que $\Lambda = (\Phi + n.id)^2$ et, tous calculs faits, on trouve :

$$\Lambda(P) = (\frac{1}{4}-X^2)^2P'' + (\frac{1}{2}-2X^2)((2n-1)X+n)P' \\ + (n^2(2X+1)^2 + 2n(\frac{1}{4}-X^2))P$$

Exercice 2.21.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble formé des endomorphismes bijectifs.

Un sous-espace F de E est dit stable par $GL(E)$ si, pour tout $u \in GL(E)$, $u(F) \subset F$.

1. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe $u \in GL(E)$ tel que $u(x) = y$.

2. Montrer que si F est stable par $GL(E)$, alors $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Solution :

1. Considérons deux cas :

• la famille (x, y) est liée : il existe alors $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$. Par le théorème de la base incomplète, on construit une base $\mathcal{B}$ de E de la forme $(x, e_2, \ldots, e_n)$. On définit parfaitement u linéaire par :

$$u(x) = y, u(e_2) = e_2, u(e_3) = e_3, \ldots, u(e_n) = e_n$$

La matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1)$. L'endomorphisme u est donc inversible.

• la famille (x, y) est libre : il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E de la forme $(x, y, e_3, \ldots, e_n)$. On définit parfaitement u linéaire par :

$$u(x) = y, u(y) = x, u(e_3) = e_3, \ldots, u(e_n) = e_n$$

L'endomorphisme u est inversible, puisque l'image par u de la base $\mathcal{B}_1$ est une base de E.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k, avec $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. On choisit alors un vecteur y non nul tel que $y \notin F$ et un vecteur x non nul de F.
Par la question précédente il existe un automorphisme u de E tel que $u(x) = y$ et donc F n'est pas stable par cet automorphisme. Donc F n'est pas stable par $GL(E)$.

Comme il est clair que $\{0\}$ et E sont stables par $GL(E)$, on a la conclusion voulue.

Exercice 2.22.

La lettre $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle E.
Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de f et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ les sous-espaces propres de f respectivement associés, ainsi que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ les valeurs propres (distinctes) de g et $G_1, G_2, \ldots, G_q$ les sous-espaces propres de g respectivement associés.
Enfin, pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$, on note $H_{i,j} = F_i \cap G_j$.

1. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on définit le polynôme $L_k = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \mp$

1. a) Soit $(k, j) \in \{1, 2, \ldots, p\}^2$. Montrer que, quel que soit $v \in F_j$:

$$L_k(f)(v) = \begin{cases} 0_E & \text{si} \quad k \neq j, \\ v & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

b) Soit maintenant U un sous-espace de E stable par f.
Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, U est stable par $L_k(f)$.

Déduire des deux résultats précédents que $U \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

Conclure que $U = \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

Montrer enfin que l'endomorphisme de U induit par f est diagonalisable.

2. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, G_j est stable par f.

3. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, $G_j = \bigoplus_{i=1}^{p} H_{i,j}$.

4. En déduire qu'il existe une base de E entièrement constituée de vecteurs propres à la fois de f et de g.

5. Montrer que tout endomorphisme de E appartenant à $\mathrm{Vect}(id, f, g, g \circ f)$ est diagonalisable.

Solution :

1. a) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $(f - \lambda_i Id)(v) = (\lambda_j - \lambda_i)v$. Il s'ensuit immédiatement que :

$$L_k(f)(v) = \Big(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \Big) v = \begin{cases} 0_E & \text{si} \quad k \neq j, \\ v & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

b) $\star$ Soit $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, U est stable par l'endomorphisme $f - \lambda_i Id$. Ainsi U est stable par toute composée de ces endomorphismes et donc par $L_k(f)$.

$\star$ Remarquons d'abord que, comme la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est une somme directe, et comme pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $U \cap F_i \subset F_i$, la somme

$$(U \cap F_1) + (U \cap F_2) + \cdots + (U \cap F_p)$$

est également directe.

Soit x un élément de U. Comme f est diagonalisable, $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$, et il existe donc $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$.
Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $L_j(f)(x) = L_j(f)(u_j) = u_j$, et donc $u_j \in U$.
On en conclut que $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$, donc que $U \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

D'autre part, il est évident que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $U \cap F_i \subset U$, donc que $\bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i) \subset U$.

Finalement, on a obtenu : $\bigoplus_{i=1}^{p}(U\cap F_i)=U$.

$\star$ Notons φ l'endomorphisme de U induit par f. Comme $\bigoplus_{i=1}^{p}(U\cap F_i)=U$, U est égal à la somme directe de sous-espaces propres de φ ; ainsi φ est diagonalisable.

2. Soit $j\in\{1,2,\dots,q\}$. Pour tout $x\in G_j$,
$$g(f(x))=f(g(x))=f(\mu_j x)=\mu_j f(x).$$
Par conséquent $f(x)\in G_j$, ce qui signifie que G_j est stable par f.

3. Soit $j\in\{1,2,\dots,q\}$. Comme G_j est stable par f, on peut écrire grâce à la première question que :
$$G_j=\bigoplus_{i=1}^{p}(G_j\cap F_i)=\bigoplus_{i=1}^{p}H_{i,j}.$$

4. La somme de $(G_j)_j$ étant directe et égale à E, on montre facilement qu'il en est de même pour la somme de $(H_{i,j})_{i,j}$. En concaténant des bases de tous ceux des $H_{i,j}$ qui ne sont pas réduits à $\{0\}$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f et g.

5. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f et g, donc également de $f\circ g$ et bien entendu de id ; ainsi si $h\in\mathrm{Vect}(id,f,g,g\circ f)$, tout vecteur de cette base est un vecteur propre de h.